Coppa Student 2025

L'Associazione Culturale Kangourou Italia opera in convenzione con:
- Dipartimento di Matematica "**Federigo Enriques**" dell'Università degli Studi di Milano
- **DIMA** - Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Genova
- **FIM** - Dipartimento di Scienze fisiche, informatiche e matematiche dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
- **Dipartimento di Matematica** dell'Università di Salerno

Per informazioni: tel. 347 040 27 55
E-mail: matematica@kangourou.it
Sito: https://www.kangourou.it

In copertina: **Tobia Ravà & Abdallah Khaled**
2013 - *Nella tempesta sulla stessa barca*

© 2025 - Edizioni Associazione Culturale Kangourou Italia
via Giacomo Medici 2 – 20900 Monza (MB)
Partita IVA 09638180969

ISBN: 978-88-89249-81-9

Coppa Student, terza edizione ufficiale

Credo che ormai il dado sia tratto e la Coppa Student possa camminare speditamente. Come introduzione devo solo fare i ringraziamenti a tutti coloro che hanno collaborato per la realizzazione di questa terza edizione:

- **CASIO** che ha offerto quattro webinar di formazione per docenti e concorrenti, specialmente dedicati alla Coppa Student, e le favolose FX - CG50, oltre al supporto per la divulgazione dell'evento;
- Il **Sindaco di Cervia e il vice Sindaco** che ci sostengono e discutono con noi per un prolungamento della disponibilità del Palazzetto dello Sport;
- **Miriam, Matteo, Martina** e il personale dell'**Agenzia Arcadia di Cesenatico**;
- **Luca Sirilli, Claudia** e lo staff di **Cervia In**;
- **Master Studio** per la generosa offerta di un viaggio all'estero ad ognuno dei componenti della squadra vincente;
- **Hard Rock Cafe** che da anni ci segue e regala ai migliori concorrenti oggetti tratti dal suo catalogo, molto appetibile dai giovani partecipanti;
- **Lorenzo Repetto** con **Simone Muselli** e **Roberto Cavicchioli** per i testi e le soluzioni dei quesiti;
- Tutti i miei collaboratori, **Cristina** alla segreteria, i tecnici **Pamela**, **Pietro** e **Alberto,** lo staff sempre presente **Elisabetta**, **Lucia** e **Giorgio, Aurelia** e **Diego, Chiara, Roberta** e **Matteo,** il Dipartimento di Matematica di Milano con **Paola, Clemente, Stefania**;
- **Federico Risi**, il responsabile del Palazzetto di Cervia.

Buon gioco a tutti.

Prof. Angelo LISSONI
Presidente Associazione Culturale
Kangourou Italia

Milano, 10 aprile 2025

Testi
della prima
selezione

28 febbraio 2025

Quesito A1 – Intorno alla Tavola Rotonda

Re Artù e i suoi 145 cavalieri sono seduti (ognuno a uguale distanza dai suoi due vicini) intorno alla grande Tavola Rotonda. Re Artù ha il numero 1, il cavaliere alla sua sinistra il numero 2, e così di seguito, in ordine, sino al cavaliere seduto alla destra di Re Artù, che ha il numero 146.
Quale numero ha il cavaliere seduto di fronte (diametralmente opposto) al cavaliere col numero 117?

Quesito A2 – Kangourou

In quanti modi si può leggere la parola KANGOUROU nella seguente figura?

```
K A N G O U R O U
  K A N G O U R O
    K A N G O U R
      K A N G O U
        K A N G O
          K A N G
            K A N
              K A
                K
```

Attenzione: *qui "leggere" significa passare da una lettera a un'altra ad essa adiacente, in orizzontale o in verticale.*

Quesito A3 – Le radici di una semplice equazione

Sapendo che a e b sono le soluzioni dell'equazione $x^2 + x - 2025 = 0$, **determinate il valore dell'espressione**

$$a^2 + 2\,b^2 + ab + b - 2025.$$

Quesito A4 – Due progressioni

La successione $\{a_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, è una progressione aritmetica di ragione $k = 29127$, mentre $\{b_n\}$ è una progressione geometrica di ragione $q = 2$, e sappiamo che hanno lo stesso valore iniziale $a_0 = b_0 = 2$.

Per quale altro valore di n (> 0) risulterà $a_n = b_n$?

Quesito A5 – Case bianche e case nere

Di una vecchia scacchiera, che si era rotta tanto tempo fa, mi sono rimaste soltanto 4 case bianche e 5 nere.

Quanti diversi quadrati 3×3 posso comporre?

Attenzione: *se un quadrato 3×3 può essere ottenuto ruotando – ma non capovolgendo! – un altro quadrato, non è da considerare diverso da questo.*

Quesito A6 – I numeri in tabella

Disponiamo i numeri naturali in una tabella, procedendo per diagonali discendenti da NE a SO, come appresso mostrato.

	0	1	2	3	4	...
0	0	1	3	6	10	...
1	2	4	7	11	...	
2	5	8	12	...		
3	9	13	...			
4	14	...				
...	...					

Calcolate il numero della riga e il numero della colonna del posto in cui si trova 2025, e date come risposta il loro prodotto.

Quesito A7 – Nei quattro salvadanai

Ciascuno dei miei quattro nipotini ha un salvadanaio. Io ho 25 monete da 2 euro, quindi dello stesso valore, e vorrei metterle tutte nei salvadanai.
In quanti modi posso suddividere le 25 monete tra i miei quattro nipotini, in modo che ognuno di loro riceva almeno una moneta?

Quesito A8 – Scambi

24 persone occupano un'intera fila di poltrone a teatro. Vogliono disporsi esattamente in ordine inverso: la persona che occupa la prima poltrona a destra dovrà occupare la prima a sinistra, la persona che occupa la seconda poltrona da destra dovrà occupare la seconda da sinistra, e così via. Però, la sola operazione che possono compiere due persone qualsiasi, purché sedute l'una accanto all'altra, è scambiarsi il posto.
Quante volte, come minimo, dovrà essere eseguita questa operazione per giungere alla disposizione voluta?

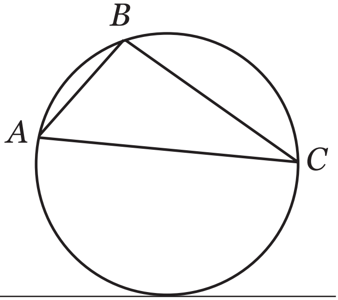
Quesito A9 – Divisibili per 13

Quanti sono i numeri interi n di tre cifre (dunque compresi tra 100 e 999) tali che

$$p(n) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6$$

sia divisibile (esattamente) per 13?

Quesito A10 – Un triangolo e la circonferenza circoscritta



Il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC ha la stessa lunghezza del lato AB, che è 292 mm; si veda la figura. L'ampiezza dell'angolo tra i lati AB e AC è 52° 30'.

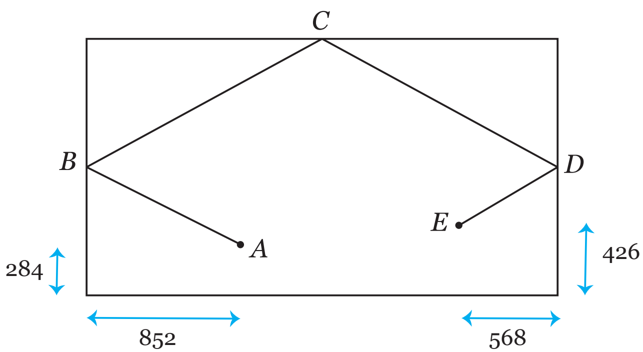
Quanti millimetri misura il lato AC? (Arrotondate la risposta al millimetro.)

Quesito A11 – Crescita di batteri

Un batterio di un certo tipo vive un'ora e mezza; trascorsa mezz'ora dalla sua nascita, genera un altro batterio dello stesso tipo, e così pure dopo un'ora, sempre dalla sua nascita.
Supponiamo che prima dell'istante 0 non vi siano batteri, e che ne nasca uno in quell'istante; **quanti batteri saranno in vita dopo 9 ore e 5 minuti?**

Quesito A12 – Tre sponde

Un tavolo da biliardo all'italiana (senza buche) ha il piano rettangolare di lunghezza 284 cm e larghezza 142 cm. Considerando le palle puntiformi, si vuole colpire la palla in E con la palla in A, facendo rimbalzare quest'ultima dapprima sulla sponda sinistra (in B), poi sulla sponda in alto (in C) e infine sulla sponda destra (in D), secondo il noto principio "l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione".



In figura sono riportate le distanze, in millimetri, di A ed E da due delle sponde.
Calcolate la lunghezza dell'intero percorso *ABCDE*, espressa in centimetri (e arrotondata al centimetro).

SCHOOL OF HARD ROCK

IL TEMPIO DELLA MUSICA ROCK SI APRE AL MONDO DELLA SCUOLA

Programmi didattici dedicati a tutti i ragazzi delle scuole primarie e secondarie di I e II Grado.

MUSIC EDUCATION SCHOOL OF Hard Rock

PER INFORMAZIONI & PRENOTAZIONI
FIRENZE - florence_social@hardrock.com | Tel. 055 277841
VENEZIA - venice_social@hardrock.com | Tel. 041 5229665
ROMA - rome_social@hardrock.com | Tel. 06 42030501

Hard Rock CAFE

FIRENZE - ROMA - VENEZIA

#HardRockCafe | hardrockcafe.com

Testi della seconda selezione

14 marzo 2025

Quesito B1 – Tartufi e bolliti misti

Lo scorso novembre, i 200 soci del "Club dei Buongustai" hanno partecipato a un pranzo per il quale un famoso chef aveva preparato due menù: tartufi e bolliti misti. Ogni socio che ha optato per il menù bolliti misti aveva già degustato questa specialità dello chef, mentre il 90% dei soci che hanno optato per il menù tartufi non aveva mai mangiato i bolliti misti.
Sapendo che il 46% di tutti i partecipanti aveva mangiato bolliti misti in precedenti occasioni, **quanti soci hanno optato per il menù tartufi in questo pranzo?**

Quesito B2 – Una lunga lista di numeri

In una lista sono scritti, in ordine crescente, tutti i numeri interi da 1 a 10000; vengono poi cancellati tutti i numeri che non sono divisibili né per 5 né per 11.
Qual è il 2025-esimo numero che rimane nella lista?

Quesito B3 – Quante frazioni!

Su una riga scriviamo 1, seguito da 99 frazioni unitarie con i denominatori da 2 a 100:

1 1/2 1/3 1/4 … 1/99 1/100

Sulla riga sottostante scriviamo le 99 frazioni unitarie che risultano come differenza tra l'una e la successiva della riga soprastante:

1/2 1/6 1/12 … 1/9900

Procedendo allo stesso modo per determinare le righe successive, sulla centesima riga sarà scritta una sola frazione unitaria.
Qual è il suo denominatore?

Quesito B4 – I termini di una progressione aritmetica

Gli elementi reali dell'insieme $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ sono 8 termini consecutivi di una progressione aritmetica di ragione $k > 0$. **Quante diverse *partizioni* di A, costituite da almeno due sottoinsiemi, possiamo costruire, *come minimo*, in modo tale che la somma degli elementi in ciascun sottoinsieme di una stessa partizione sia costante?**

Nota: ricordiamo che una partizione costituita da almeno due sottoinsiemi di un insieme S è una famiglia di almeno due sottoinsiemi di S, a due a due disgiunti e tali che la loro unione sia proprio S.

Ad esempio, se S = {1, 2, 3, 4, 5}, una partizione di S, costituita da tre sottoinsiemi, è formata da {1, 4}, {2, 3} e {5}, non importa in quale ordine; questa partizione soddisfa la condizione richiesta nel testo del quesito, poiché la somma degli elementi in ciascuno dei tre sottoinsiemi è costante (vale 5).

Quesito B5 – I fattori primi

Quanti sono i numeri interi positivi minori di 100000 che hanno come fattori primi sia 2 sia 3 e nessun altro?

Quesito B6 – Calcolo di un integrale da zero a infinito

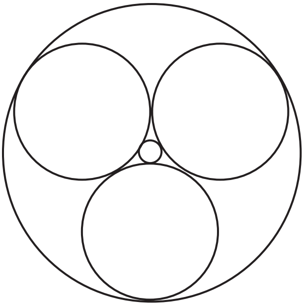
Calcolate il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} 300 \cdot \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx$$

e **date come risposta il risultato arrotondato all'unità.**

Quesito B7 – Cinque circonferenze

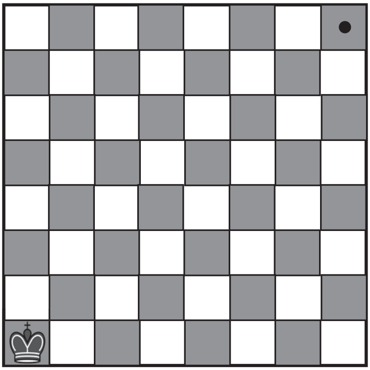
Nella figura sono disegnate tre circonferenze di uguale raggio, ciascuna tangente alle altre due, con una circonferenza più piccola di diametro 26 mm e una più grande, entrambe tangenti a tutte e tre le prime.



Quanti millimetri misura il raggio della circonferenza più grande? (*Arrotondate il risultato al millimetro.*)

Quesito B8 – Altri cammini del Re

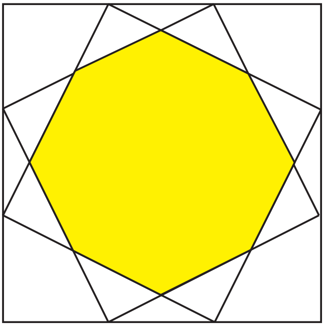
Supponiamo che, sulla classica scacchiera 8×8, il Re possa spostarsi, ad ogni passo, di una casa in verticale, verso l'alto (ossia verso Nord), oppure di una casa in orizzontale, verso destra (ossia verso Est).



Quanti sono i diversi percorsi che il Re può seguire per arrivare nella casa all'angolo opposto?

Quesito B9 – L’area di un ottagono

Il lato del quadrato più grande misura 18 cm. Ciascuno dei suoi lati è suddiviso in tre segmenti di uguale lunghezza, i cui estremi sono uniti come mostrato nella figura.



Quanti centimetri quadrati misura l’area dell’ottagono colorato?

Quesito B10 – La scelta dei gelati

La gelateria dispone di 9 gusti alla frutta e di 5 gusti alla crema. Marta desidera una coppa con quattro gusti diversi, non più di due alla crema; anche Giulia desidera una coppa con quattro gusti diversi, non tutti alla frutta.

Chi di loro avrà più possibilità di scelta?

Date come risposta il numero delle possibili combinazioni di gusti per colei che ne ha di più, nel rispetto dei vincoli posti.

Quesito B11 – La cifra cancellata

Pino aveva scritto su un foglietto un numero di nove cifre; ma il suo amico Lino ha cancellato la prima cifra, e adesso si leggono le otto cifre 40494863.

Pino ricorda che il numero che aveva annotato è il prodotto di due numeri primi gemelli (vale a dire che il valore assoluto della loro differenza è 2).

Qual è la cifra che Lino ha cancellato?

Quesito B12 – Crescita di una popolazione: il modello logistico

Nella Finale 2023 fu proposto un quesito sulla crescita nel tempo della popolazione mondiale secondo il modello di Kapitsa (1995). Consideriamo ora un modello classico, e più conosciuto, che si riferisce a una generica popolazione p, il cui tasso di crescita varia nel tempo: in particolare, decresce quanto più p tende alla cosiddetta "capacità portante", il massimo numero M di individui che l'ambiente possa mantenere. Questo modello, detto *logistico*, è espresso dall'equazione differenziale (non lineare)

$$\mathrm{d}p(t)\ /\ \mathrm{d}t = k \cdot p(t) \cdot (1 - p(t)\ /\ M\ )$$

dove k è una costante (che ha come dimensione fisica l'inverso di un tempo).

Con riferimento al genere umano, ipotizziamo $k = 0.025$ (in 1/anno) e $M = 11.2$ (in miliardi); per stabilire una condizione iniziale, sappiamo che, all'inizio del 2024, la popolazione mondiale è stata stimata a circa 8.074 miliardi.

Applicando il più semplice metodo di integrazione numerica (di Eulero, a un passo, esplicito), con passo $h = 1$ (un anno), calcolate all'inizio di quale anno la popolazione mondiale avrà superato (per la prima volta) la soglia dei 10 miliardi.

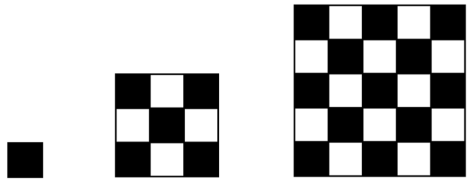
Nota: il metodo citato approssima $y(t)$, soluzione dell'equazione $\mathrm{d}y(t)\ /\ \mathrm{d}t = f\ (t,\ y)$, agli istanti $t(i) = i \cdot h$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$, con la successione $y(t(i+1)) = y(t(i)) + h \cdot f\ (t(i), y(t(i)))$, dato $y(0)$ e fissato un valore opportuno per il passo h.

Testi della finale nazionale

8 maggio 2025

Quesito C1 – Scacchiere dispari

Osservate la sequenza di scacchiere, con un numero dispari di case per lato, che inizia con quelle raffigurate qui a destra: la scacchiera n. 1, la n. 2 e la n. 3.



scacchiera n. 1 scacchiera n. 2 scacchiera n. 3

Quante case nere avrà la scacchiera n. 70?

Quesito C2 – Un triangolo rettangolo

Di un triangolo rettangolo si sa che i raggi delle circonferenze circoscritta e inscritta misurano 562 mm e 212 mm, rispettivamente.
Quanti millimetri misura il perimetro del triangolo?

Quesito C3 – Il più grande divisore

Trovate il più grande divisore del numero $2^{29} – 1$, che sia minore di $2^{29} – 1$, *e date come risposta le sue prime quattro cifre (da sinistra).*

Quesito C4 – Una porzione di successione

Considerate la successione di interi $a_n = n^6$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).
Calcolate la somma dei naturali k tali che $7^{15} < a_k < 6^{17}$.

Quesito C5 – Da un mazzo di carte

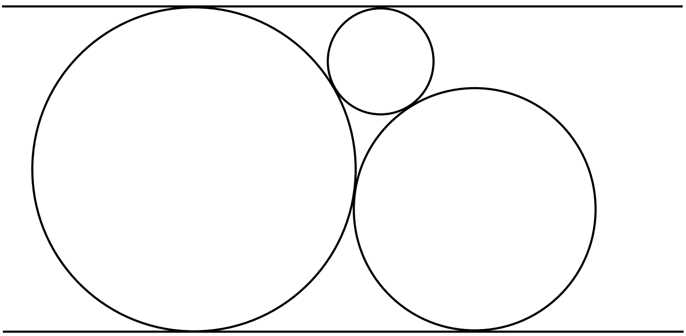
Prendiamo un mazzo di 40 carte: asso, 2, 3, 4, 5, 6, 7, fante, donna e re, per ciascuno dei quattro semi. Ripetiamo per 5 volte queste azioni: mescoliamo bene il mazzo, estraiamo una carta, vediamo qual è, inseriamo di nuovo nel mazzo la carta estratta.
Calcolate la probabilità che si estraggano:

1. **esattamente tre figure (fante, donna o re);**
2. **almeno una figura.**

Esprimete entrambe le probabilità in percentuale, arrotondandole all'unità, e date come risposta il loro prodotto; ad esempio, se risultassero la prima del 23% e la seconda del 64%, la risposta da dare sarebbe 1472.
Suggerimento: la sequenza di azioni descritta è una prova di Bernoulli, il cui "successo" è l'estrazione di una figura.

Quesito C6 – Tre circonferenze tra due parallele

Nella figura sono disegnate tre circonferenze, ognuna tangente alle altre due; la più grande è anche tangente a due rette parallele, ciascuna delle altre due è anche tangente a una di queste rette.



Calcolate il raggio della circonferenza più grande, in centimetri, sapendo che i raggi delle altre due misurano 28 cm e 63 cm.

Quesito C7 – Boomerang!

Calcolate i seguenti integrali definiti

$$\int_{-5}^{6} \left(ln\,(1+e^{-x}) + \frac{x}{3} \right) dx \qquad \int_{-5}^{6} \left(ln\,(1+e^{x}) - \frac{2x}{3} \right) dx$$

approssimandoli entrambi all'unità, e chiamate S la somma dei due risultati ottenuti.
Trovate la derivata rispetto a x della prima funzione integranda, e chiamate D il suo valore per $x = 0$.
Infine, *date come risposta il valore assoluto del rapporto S / D.*

Quesito C8 – Incontri fra camaleonti

Ci sono 23 camaleonti verdi, 14 azzurri e 11 grigi. Gli incontri avvengono sempre tra due camaleonti. Quando due camaleonti di diverso colore si incontrano, entrambi assumono quel terzo colore che nessuno dei due ha.

Quanti incontri devono avvenire, come minimo, affinché vi sia lo stesso numero di camaleonti per ciascuno dei tre colori?

E quante sono le diverse sequenze di incontri, di lunghezza minima, che conducono allo stesso numero di camaleonti per ciascuno dei tre colori?

Date come risposta il prodotto dei due numeri che costituiscono le risposte alle due precedenti domande.

Quesito C9 – Addizioni, sottrazioni e scambi

Definiamo tre regole che permettono di passare da una coppia di numeri naturali (interi non negativi) a un'altra, scrivendo $c_1 \rightarrow c_2$ per indicare che, in un passo, da c_1 si giunge a c_2:

1) $(a, b) \rightarrow (a + b, b)$
2) $(a, b) \rightarrow (a - b, b)$ purché $a \geq b$
3) $(a, b) \rightarrow (b, a)$

In quanti passi, *come minimo*, da (11319, 3612) si giunge a (6783, 3045)?

Suggerimento: applicare dapprima la regola 2 e, quando serve, la regola 3, sino ad arrivare alla coppia (126, 21)…

Quesito C10 – L'immagine di una funzione periodica

Considerate la funzione periodica

$3 \cdot \cos(x) \cdot \cos(2x) - 2 \cdot \sin(2x) + 4 \cdot \cos(3x) \cdot \sin(x) - 7 \cdot \cos(2x) \cdot \sin(x) + 5 \cdot \sin(x) \cdot \sin(3x)$

La sua immagine è strettamente contenuta nell'intervallo $[a, b]$. **Stabilite il massimo valore intero per *a* e il minimo valore intero per *b*,** *e date come risposta la differenza b – a.*

Quesito C11 – Un prato d'erba medica

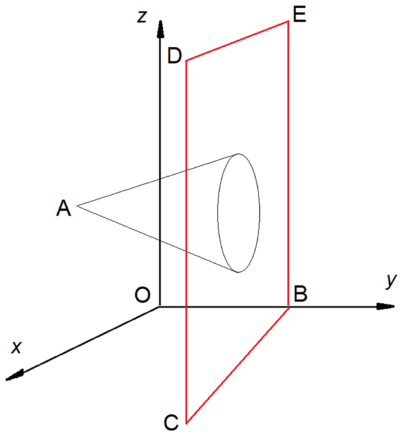
Questa settimana sono in campagna. Accanto alla cascina, ho un prato d'erba medica, sul quale pascolano sei pecore. Adesso è lunedì mattina, e il peso di tutta l'erba nel prato è 85 kg. Le pecore iniziano a brucare e, durante la giornata, ognuna di esse mangia 4 kg d'erba. Alla sera, le pecore rientrano nella stalla e, durante la notte, l'erba ricresce – chissà perché, nel mio prato, soltanto di notte! – sicché il mattino successivo è il $p\%$ in più rispetto alla sera precedente. Venerdì mattina, quando le pecore arrivano sul prato, il peso di tutta l'erba sarà lo stesso che vi sarebbe il giorno dopo, sabato, se avessi soltanto cinque pecore invece di sei.
Quanto vale *p*?
(*Scrivete le prime tre cifre significative; ad esempio, se fosse $p\% = 7.245\%$, scrivete 724.*)

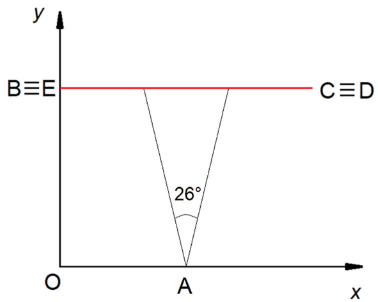
Quesito C12 – Cambiamonete

Disponendo di quantità comunque sufficienti di tagli da 50, 20, 10, 5, 2, 1 euro, **in quanti modi diversi è possibile cambiare una banconota da 100 euro?**

Quesito C13 – Quando si vedrà la luce?

Un cono di luce, il cui asse è perpendicolare al piano $y = 0$, irradia dal punto A del piano $y = 0$ (il vertice del cono), sino al pannello opaco $BCDE$, di forma rettangolare e piuttosto alto, che può ruotare attorno al suo lato BE. Inizialmente, il pannello è parallelo al piano $y = 0$.





La figura a destra mostra una proiezione dall'alto sul piano $z = 0$, che può essere utile per rispondere alla domanda:
di quanti gradi al massimo può ruotare il pannello, in senso antiorario, affinché il cono di luce non fuoriesca dal lato *CD*?
(*Approssimate il risultato al grado.*)

Oltre all'ampiezza del cono di luce, 26°, si conoscono la distanza del punto A dall'asse z, 56 cm, e le lunghezze dei segmenti OB e BC, 80 cm e 113 cm, rispettivamente.

Soluzioni della prima selezione

28 febbraio 2025

Quesito A1 – Intorno alla Tavola Rotonda

Risposta: 44.
In generale, se N è il numero (pari) di persone sedute intorno alla Tavola Rotonda, numerate in ordine da 1 a N (in senso orario o antiorario, non importa) di fronte alla persona col numero x sta seduta la persona col numero $(N/2 + x)$ *mod* N, ossia il resto che si ottiene dividendo $(N/2 + x)$ per N.
Nel caso proposto: $(146/2 + 117)$ *mod* $146 = 190$ *mod* $146 = 44$.

Quesito A2 – Kangourou

Risposta: 256.
Procedendo a ritroso, dall'ultima U in alto a destra, possiamo passare alla precedente O in due modi (orizzontale e verticale), da ognuna di queste due O possiamo passare alla R precedente in due modi, e così via. Alternativamente, ruotando la figura è possibile sovrapporla al triangolo di Tartaglia, associando così a ciascuna lettera il numero dei diversi percorsi che la collegano alla U al vertice; sicché la riga con le K sarà sovrapposta alla riga 8 del triangolo: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, la cui somma è $2^8 = 256$.

Quesito A3 – Le radici di una semplice equazione

Risposta: 2026.
Naturalmente, con la calcolatrice, si possono trovare subito a e b, che sono circa –45.5028 e 44.5028 (rispettivamente, o viceversa); ma, dall'identità dei polinomi

$$x^2 + x - 2025 \quad \text{e} \quad (x - a) \cdot (x - b),$$

si può anche osservare che $a + b = -1$ e $ab = -2025$, per cui:

$$a^2 + 2b^2 + ab + b - 2025 = a^2 + b^2 + b \cdot (b + a + 1) - 2025 =$$
$$a^2 + b^2 + b \cdot 0 - 2025 = (a + b)^2 - 2ab - 2025 =$$
$$1 - 2ab - 2025 = 1 + 4050 - 2025 = 2026.$$

Quesito A4 – Due progressioni

Risposta: **18.**
Per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha: $a_n = a_0 + k \cdot n$ e $b_n = b_0 \cdot q^n$.
Imponendo $a_n = b_n$ si ottiene:

$a_0 + k \cdot n = b_0 \cdot q^n$, ovvero, sostituendovi i valori dati,
$2 + 29127 \cdot n = 2 \cdot 2^n$, da cui $29127 \cdot n = 2 \cdot (2^n - 1)$,

equazione che ammette, oltre alla soluzione ovvia $n = 0$, la sola altra soluzione $n = 18$, che può essere trovata con la calcolatrice, ad esempio dall'intersezione delle due funzioni

$14563.5 \cdot x + 1$ e $2x$.

Come si potrebbe ragionare, in generale, non disponendo di una calcolatrice come **CASIO fx-CG50**?
Dall'uguaglianza
$2 + 29127 \cdot n = 2 \cdot 2^n$
discende che n deve essere pari;
ponendo $n = 2m$ si ha
$2 + 29127 \cdot 2m = 2 \cdot 2^{2m}$ ossia,
dividendo per 2,
$1 + 29127 \cdot m = 4^m$.
Questa uguaglianza implica che $m = 1 + 4h$ per un naturale h, dato che 29127 diviso 4 è 7281 con resto 3, e $1 + 3 = 4$;
si ha quindi
$1 + 29127 \cdot (1 + 4h) = 29128 + 29127 \cdot 4h = 4 \cdot 4^{4h}$
ossia, dividendo per 4,
$7282 + 29127 \cdot h = 256^h$.
Dividendo ancora per 256, e considerando i resti,
$114 + 199 \cdot h$ deve essere un multiplo di 256,
condizione necessaria ma non sufficiente.
Si verifica facilmente che $h = 2$ è effettivamente una soluzione dell'equazione $7282 + 29127 \cdot h = 256^h$;
con $h = 2$, $114 + 199 \cdot 2 = 512 = 256 \cdot 2$,
quindi $m = 9$ e, infine, $n = 18$.

Quesito A5 – Case bianche e case nere

Risposta: 34.
Considerando le permutazioni con ripetizione, poiché i colori sono due e le case sono 4 di un colore e 5 dell'altro, il loro numero complessivo è dato da $9!/(4! \cdot 5!) = 126$.
Due di queste corrispondono a configurazioni che si mantengono identiche quando sono ruotate di 90° (a destra o a sinistra, indifferentemente), altre quattro quando invece sono ruotate di 180°. Indicando con 0 il colore bianco e con 1 il nero, esse sono, rispettivamente:

0 1 0 1 1 1 0 1 0	1 0 1 0 1 0 1 0 1

0 0 1 1 1 1 1 0 0	1 1 0 0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0 1 1 0	1 0 0 1 1 1 0 0 1

Ciascuna delle due configurazioni nella prima riga costituisce un gruppo a sé; le prime due della seconda riga si ottengono l'una dall'altra per rotazione, e così pure le ultime due della seconda riga, mentre le altre 120 configurazioni si suddividono in gruppi di quattro. Pertanto il numero di configurazioni diverse (modulo rotazioni) risulta $2 + 4/2 + 120/4 = 34$.

Quesito A6 – I numeri in tabella

Risposta: 486.
Il numero 2025 si trova alla riga 9, colonna 54. Per sapere dove si trova il generico numero naturale n, basta calcolare il più piccolo numero triangolare $k \cdot (k + 1)/2$ che sia strettamente maggiore di n: dunque, il numero della riga sarà

$$r = n - (k - 1) \cdot k/2$$

e il numero della colonna

$$c = k - 1 - r.$$

Così facendo, si definisce una funzione che ***enumera*** le coppie di naturali, e che (oltre ad essere totale, ossia definita per ogni naturale n) è anche bigettiva (quindi invertibile).

Nel nostro caso: $n = 2025$, per cui $k = 64$
(in quanto $64 \cdot 65/2 = 2080$,
mentre $63 \cdot 64/2 = 2016$),

$r = 2025 - 2016 = 9$ e $c = 64 - 1 - 9 = 54$.

*Usando la calcolatrice **CASIO fx-CG50**, il giusto valore da attribuire a k può essere facilmente trovato col foglio di calcolo; ecco, comunque, un breve programma in Python che, dato n, calcola r e c:*

```
n = input('n = ')
k = 1
while k*(k+1)/2 <= n:
    k += 1
r = n - (k-1)*k/2
c = k - 1 - r
print(r, c)
```

Quesito A7 – Nei quattro salvadanai

Risposta: 2024.
Dapprima metto una moneta in ognuno dei salvadanai dei miei nipotini: me ne rimangono 21, che ora posso distribuire arbitrariamente nei quattro salvadanai. Immagino di metterle in fila e di disporre tre separatori tra esse, per rappresentare la suddivisione tra i salvadanai; ad esempio,

O O O O | O O O O O O O O O O O | O O O O O O |

significa che metterò altre 4 monete nel salvadanaio del primo nipotino, altre 11 in quello del secondo, altre 6 in quello del terzo e nessun'altra nel salvadanaio del quarto nipotino (lasciandovi soltanto la moneta che vi avevo messo inizialmente). Allora il calcolo è presto fatto: si tratta delle permutazioni con ripetizione di 24 oggetti, di cui 21 indistinguibili tra loro e 3 pure, che sono date da $24!/(21! \cdot 3!) = 24 \cdot 23 \cdot 22/6 = 2024$.

Quesito A8 – Scambi

Risposta: 276.
La persona che occupa la prima poltrona a destra deve fare 23 scambi di posto per giungere alla prima poltrona a sinistra; dopodiché, la persona che occupava la seconda poltrona da destra (e che ora occupa la prima a destra) dovrà fare 22 scambi di posto per giungere alla seconda poltrona da sinistra, e così via, sino all'ultimo scambio, che porterà l'attuale persona che occupa la prima poltrona a destra a occupare la seconda da destra, e con quest'ultimo scambio anche la persona che inizialmente occupava la poltrona più a sinistra andrà al suo posto definitivo, ossia la poltrona più a destra. In tutto, dunque, $23 + 22 + \ldots + 1 = 23 \cdot 24/2 = 276$ scambi; un numero inferiore di scambi non può portare alla disposizione voluta.
Cerchiamo di capire perché.
Guardando la fila di poltrone occupate, consideriamo due persone p_1 e p_2 sedute accanto, p_1 a sinistra e p_2 a destra; il loro scambio aggiunge p_2 all'insieme di persone a sinistra di p_1 e, nel contempo, sottrae p_1 all'insieme di persone a sinistra di p_2. Per passare dalla situazione iniziale a quella finale, per ogni persona, il numero di persone che devono essere aggiunte a sinistra sommato al numero di persone che devono essere sottratte a sinistra è sempre 23; dunque sono necessarie $23 \cdot 24$ operazioni, ciascuna delle quali consiste nell'aggiunta o nella sottrazione di una persona a o da un insieme di persone. Poiché ogni scambio consiste di due operazioni, sono necessari almeno $23 \cdot 24/2$ scambi.
*Si tratta, in effetti, del caso peggiore che si possa presentare per l'algoritmo di ordinamento noto come **bubble-sort**: la sequenza iniziale è esattamente rovesciata rispetto a quella che si desidera ottenere, e in tal caso il numero degli scambi necessari uguaglia il numero dei confronti fra due elementi adiacenti, che per una sequenza di lunghezza n è proprio $(n - 1) \cdot n/2$. Almeno nei casi peggiori, la complessità rispetto al tempo di questo algoritmo è quadratica nel numero di elementi della sequenza da ordinare.*

In generale, indicati con s[i] gli elementi della sequenza iniziale, il numero di scambi effettuati da bubble-sort per ordinarla in senso ascendente è dato dal numero di coppie (s[i], s[k]) tali che i < k e s[i] > s[k].

Quesito A9 – Divisibili per 13

Risposta: 209.
Poiché $p(n) = (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ e 13 è un numero primo, bisogna che uno dei tre fattori testé scritti sia un multiplo di 13. Il primo valore accettabile per n è 101, in quanto il terzo fattore $n + 3$ risulta essere 104; e allora anche 102 e 103 sono accettabili, poiché rendono uguale a 104 il secondo e il primo fattore, rispettivamente. La successiva terna di valori accettabili per n è $101 + 13 = 114$, 115, 116, e così di seguito, sino a $n = 101 + 68 \cdot 13 = 985$, 986, 987.
Infine, anche $n = 985 + 13 = 998$, 999 (ma non 1000, già di quattro cifre) sono accettabili. In tutto, dunque, $69 \cdot 3 + 2 = 209$ valori accettabili per n.
Naturalmente, per trovare la risposta in modo rapido, si poteva ricorrere a un programmino di forza bruta:

```
conta = 0
for n in range(100, 1000):
    if (n**3 + 6*n*n + 11*n + 6)%13 == 0:
        conta += 1
print(conta)
```

Quesito A10 – Un triangolo e la circonferenza circoscritta

Risposta: 579.
AB è il lato dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza, e pertanto l'ampiezza dell'angolo (alla circonferenza) ACB è la metà di 60° (l'ampiezza dell'angolo al centro), ossia 30°. L'ampiezza dell'angolo ABC è $180° – 52° 30' – 30° = 97° 30'$, e per il teorema dei seni: $AB : \sin(30°) = AC : \sin(97° 30')$, ossia:
$AC = 2 \cdot 292 \text{ mm} \cdot \sin(97° 30') \approx 579 \text{ mm}$.

Quesito A11 – Crescita di batteri

Risposta: 8362.
Assumiamo come unità di misura temporale la mezz'ora. Al tempo 0 c'è un solo batterio; al tempo 1 se ne aggiunge un altro, così i batteri sono 2; al tempo 2 (ossia dopo un'ora dall'istante 0) se ne aggiungono altri due e il primo è ancora vivo, sicché ci sono 4 batteri. Dal tempo 3 in poi, il numero di batteri in vita sarà dato dalla somma dei due numeri precedenti (i batteri vivi mezz'ora prima più quelli vivi un'ora prima):

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = 4, \quad B_{n+3} = B_{n+2} + B_{n+1} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

per cui $B_{18} = 8362$, come si può ricavare in poco tempo usando il foglio di calcolo della ***calcolatrice CASIO fx-CG50***.
È interessante la relazione tra questa successione e quella, famosa, di Fibonacci:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si ha infatti:

$$B_{n+1} = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

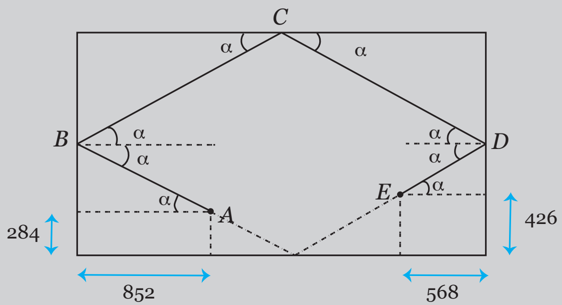
e quindi, conoscendo l'espressione in forma chiusa di F_n

$$F_n = (\phi^n - (1 - \phi)^n) / \sqrt{5}$$

dove $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ *è* ***il numero aureo****, si poteva calcolare facilmente* $B_{18} = F_{17} + F_{18} + F_{19} = 1597 + 2584 + 4181 = 8362$.
In effetti, si verifica che $B_n = 2 \cdot F_{n+1}$ *per ogni* $n > 0$*, e questa è una relazione più semplice in quanto, conoscendo l'espressione in forma chiusa di* F_n*, è sufficiente calcolare* F_{19}.

Quesito A12 – Tre sponde

Risposta: 476.
Con riferimento alla seguente figura, e indicando la lunghezza di un segmento con i suoi estremi, si ha:



$AB = 852 \,/\, \cos\alpha$ **(1)**;

$BC \cos\alpha + CD \cos\alpha = 2840$,

da cui: $BC + CD = 2840 \,/\, \cos\alpha$ **(2)**;

$DE = 568 \,/\, \cos\alpha$ **(3)**;

$284 + AB \sin\alpha + BC \sin\alpha = 1420$,

da cui: $AB + BC = 1136 \,/\, \sin\alpha$ **(4)**;

$426 + DE \sin\alpha + CD \sin\alpha = 1420$,

da cui: $CD + DE = 994 \,/\, \sin\alpha$ **(5)**.

Dalle equazioni **(1)**, **(2)** e **(3)** si ricava:

$AB + BC + CD + DE = 4260 \,/\, \cos\alpha$,

mentre dalla **(4)** e dalla **(5)** si ha:

$AB + BC + CD + DE = 2130 \,/\, \sin\alpha$,

e dunque: $2130 \cos\alpha = 4260 \sin\alpha$, da cui:

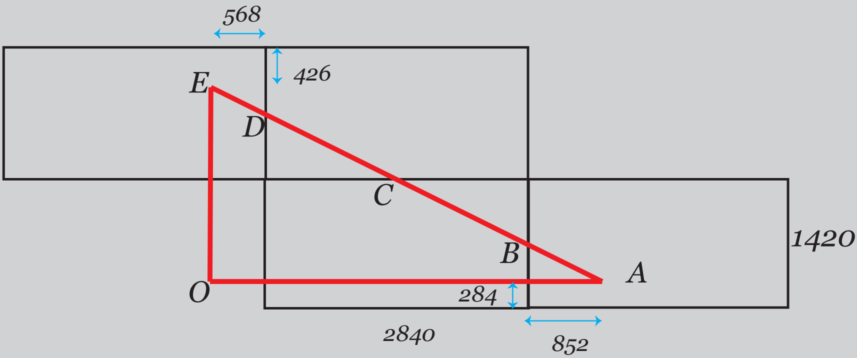
$\alpha = \mathrm{atan}(2130 \,/\, 4260) = \mathrm{atan}(0.5)$, e infine:

$AB + BC + CD + DE = 4260 \,/\, \cos(\mathrm{atan}(0.5)) \approx 4763$, corrispondente a circa 476 centimetri.

Notiamo che, in questo caso particolare, il percorso ABCDE è parte del perimetro del rombo inscritto nel rettangolo che rappresenta il tavolo da biliardo.

...

Così come per il quesito "Due sponde", proposto alla finale nazionale dello scorso anno, c'è un'elegante soluzione alternativa: ribaltando più volte il suddetto rettangolo, otteniamo la seguente figura.



Quindi AE è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente cateti AO di lunghezza (in cm) $852 + 2840 + 568 = 4260$ e OE di lunghezza (in cm) $(1420 - 284) + (1420 - 426) = 2130$, e dunque la lunghezza di AE (in cm) è data da $\sqrt{4260^2 + 2130^2} \approx 4763$.

Soluzioni della seconda selezione

14 marzo 2025

Quesito B1 – Tartufi e bolliti misti

Risposta: 120.
Detto x il numero di soci che hanno optato per il menù bolliti misti, si ha:

- numero di soci che non avevano mai mangiato bolliti misti $= 0.9 \cdot (200 - x)$;
- numero di soci che avevano già mangiato bolliti misti in precedenza $= 0.46 \cdot 200 = 92$.

La somma di questi due numeri deve dare il numero totale di soci: $0.9 \cdot (200 - x) + 92 = 200$, da cui $x = 80$.
I rimanenti soci, 200 – 80, hanno dunque scelto il menù tartufi.

Quesito B2 – Una lunga lista di numeri

Risposta: 7425.
Ecco un *programma di forza bruta*, in Python, che esegue il calcolo… senza usare liste!

```
conta = 0
n = 4
while conta < 2025:
    n += 1
    if n%5 == 0 or n%11 == 0:
        conta += 1
print(n)
```

Ed ecco invece una soluzione "matematica", partendo dal fatto che, dal numero 1 al numero 55 compreso, vi sono 55/5 = 11 multipli di 5 e 55/11 = 5 multipli di 11, e pertanto vi sono 11 + 5 – 1 = 15 multipli di 5 o di 11. Poiché per ogni naturale k e per ogni naturale n, n è multiplo di 5 o di 11 se e soltanto se n + 55k è multiplo di 5 o di 11, vi sono 15 multipli di 5 o di 11 nei numeri da 1 + 55k a 55 + 55k per ogni naturale k. Dividiamo allora 2025 per 15, ottenendo 135; il 2025-esimo multiplo di 5 o di 11 sarà quindi 55 · 135 = 7425.

Quesito B3 – Quante frazioni!

Risposta: 100.

Alla fine, infatti, si otterrà 1/100, che, in questo caso del tutto particolare, è l'ultima frazione della riga iniziale. La dimostrazione non è banale. In generale, si può provare per induzione che, partendo da una sequenza di $n + 1$ termini $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ e operando n volte come descritto nel testo, si ottiene il valore

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k (-1)^k$$

(la prova per induzione è lasciata come esercizio). Se applichiamo questo risultato al caso in esame, dove $n = 99$ e $a_k = 1/(k + 1)$ per ogni $k = 0, \ldots, 99$, il valore finale sarà quindi

$$\sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} \frac{1}{k+1} (-1)^k = \sum_{k=0}^{99} \frac{99!}{k!\,(99-k)!\,(k+1)} (-1)^k = \sum_{k=0}^{99} \frac{99!}{(k+1)!\,\big(100-(k+1)\big)!} (-1)^k =$$

$$= \frac{1}{100} \sum_{k=0}^{99} \binom{100}{k+1} (-1)^k = -\frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} \binom{100}{k} (-1)^k = \frac{1}{100} \left(1 - \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (-1)^k \right) =$$

$$= \frac{1}{100} \left(1 - (-1+1)^{100}\right) = \frac{1}{100}$$

(al penultimo passaggio è stata applicata la formula del binomio di Newton).

Quesito B4 – I termini di una progressione aritmetica

Risposta: 5.
In mancanza di ulteriori informazioni, possiamo scrivere

$$a_n = a_1 + k \cdot (n - 1), \quad \text{per } n \geq 1$$

e pertanto la somma degli 8 termini è $8a_1 + 28k$, e potrà essere divisa sia per 4 sia per 2, dando luogo a partizioni in sottoinsiemi di somma $2a_1 + 7k$ o $4a_1 + 14k$, rispettivamente.
Ecco quindi le partizioni certamente possibili:

1) $\{a_1, a_8\}, \{a_2, a_7\}, \{a_3, a_6\}, \{a_4, a_5\}$
2) $\{a_1, a_2, a_7, a_8\}, \{a_3, a_4, a_5, a_6\}$
3) $\{a_1, a_3, a_6, a_8\}, \{a_2, a_4, a_5, a_7\}$
4) $\{a_1, a_4, a_5, a_8\}, \{a_2, a_3, a_6, a_7\}$
5) $\{a_1, a_4, a_6, a_7\}, \{a_2, a_3, a_5, a_8\}$

(dalla prima si ottengono le tre successive, unendo i sottoinsiemi a due a due, ma non l'ultima).
Supponiamo, ad esempio, $a_1 = 3$ e $k = 1$, ovvero $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ con somma $52 = 2^2 \cdot 13$. Poiché il termine maggiore è 10, i sottoinsiemi dovranno avere somma 13 o 26, ed è facile verificare che le sole partizioni possibili sono quelle sopra elencate.
Naturalmente, se fosse $a_1 = 0$ e $k = 1$, si avrebbero più possibilità (lo zero può stare in ogni sottoinsieme), così come, tanto per fare un altro esempio, se fosse $a_1 = 2$ e $k = 2$, ovvero $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ con somma $72 = 2^3 \cdot 3^2$, dove i sottoinsiemi possono avere somma 24, come nella partizione $\{2, 10, 12\}, \{4, 6, 14\}, \{8, 16\}$.

Nota storica. *Il problema di decidere se un insieme arbitrario di numeri interi possa essere ripartito in due sottoinsiemi di uguale somma è NP-completo, come provato da* ***Richard M. Karp*** *nel suo fondamentale articolo sulla complessità,* ***Reducibility among combinatorial problems****, apparso nel 1972, ove, elencato sotto il* *nome Partition, è il penultimo di una lista di 21 problemi provati "equivalenti" quanto a complessità rispetto al tempo. Tuttora non si conoscono algoritmi efficienti (ovvero di complessità-tempo polinomiale nella lunghezza in bit dei dati di input), né si sa se ne esistano, per risolvere uno qualsiasi dei problemi citati in quella lista, che nel frattempo si è notevolmente allungata a comprenderne parecchie centinaia…*

Quesito B5 – I fattori primi

Risposta: 74.

I numeri in questione possono essere scritti come $2^p \cdot 3^q$, con p e q interi positivi.

- Se $q = 1$, p può assumere i valori da 1 a 15, in quanto $2^{15} \cdot 3 = 98304$, ma $2^{16} \cdot 3 = 196608$ (>= 100000);
- se $q = 2$, p può assumere i valori da 1 a 13, in quanto $2^{13} \cdot 3^2 = 73728$, ma $2^{14} \cdot 3^2 = 147456$;
- se $q = 3$, p può assumere i valori da 1 a 11, in quanto $2^{11} \cdot 3^3 = 55296$, ma $2^{12} \cdot 3^3 = 110592$;
- se $q = 4$, p può assumere i valori da 1 a 10, in quanto $2^{10} \cdot 3^4 = 82944$, ma $2^{11} \cdot 3^4 = 165888$;
- se $q = 5$, p può assumere i valori da 1 a 8, in quanto $2^8 \cdot 3^5 = 62208$, ma $2^9 \cdot 3^5 = 124416$;
- se $q = 6$, p può assumere i valori da 1 a 7, in quanto $2^7 \cdot 3^6 = 93312$, ma $2^8 \cdot 3^6 = 186624$;
- se $q = 7$, p può assumere i valori da 1 a 5, in quanto $2^5 \cdot 3^7 = 69984$, ma $2^6 \cdot 3^7 = 139968$;
- se $q = 8$, p può assumere i valori da 1 a 3, in quanto $2^3 \cdot 3^8 = 52488$, ma $2^4 \cdot 3^8 = 104976$;
- se $q = 9$, p può assumere i valori da 1 a 2, in quanto $2^2 \cdot 3^9 = 78732$, ma $2^3 \cdot 3^9 = 157464$;
- q non può assumere valore 10, in quanto $2 \cdot 3^{10} = 118098$.

Dunque, i numeri richiesti sono in tutto

$$15 + 13 + 11 + 10 + 8 + 7 + 5 + 3 + 2 = 74.$$

...

Un breve programma in Python conferma questo risultato:

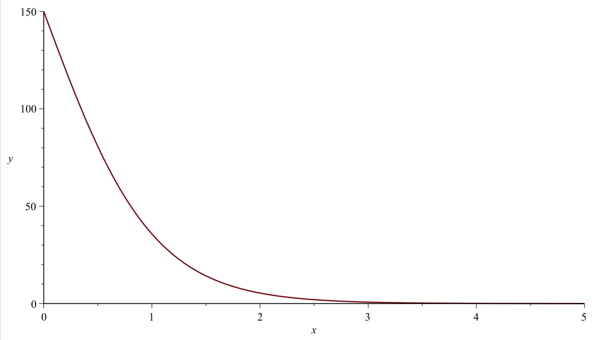
```
conta = 0
for q in range(1, 10):
    for p in range(1, 16):
        if (2**p)*(3**q) < 100000:
            conta += 1
print(conta)
```

Tuttavia, la soluzione più interessante segue dall'osservare che si vogliono calcolare e poi sommare le parti intere dei termini $\log_2(10^5/3^q)$, *per q intero maggiore o uguale a 1 (si noti che sicuramente questa somma sarà finita, poiché da un certo q in poi tali termini avranno tutti valore 0). In effetti, quando si scrive che, per* $q = 1$, *p può arrivare fino a 15, si sta dicendo che* $2^p \leq 10^5/3^1$ *ha come soluzioni intere i numeri da 1 a 15; ma questa disequazione si risolve come* $p \leq \log_2(10^5/3^1)$*: da qui il considerare la parte intera per contare il numero di soluzioni intere. Il numero p viene così calcolato tramite logaritmo anziché per tentativi, e questa scrittura compatta permette poi un veloce calcolo con la calcolatrice. Infatti, l'operazione ora descritta può essere rapidamente eseguita servendosi della funzione "Tabelle" della calcolatrice* ***CASIO fx-CG50****, in quanto quest'ultima dispone sia della parte intera, denotata con "Int", sia del logaritmo in base 2.*

Quesito B6 – Calcolo di un integrale da zero a infinito

Risposta: 104.

La figura mostra il grafico della funzione integranda da $x = 0$ a $x = 5$.



Usando la calcolatrice ***CASIO fx-CG50***, integrando questa funzione da 0 a 5, si riesce già a trovare una sufficiente approssimazione del risultato: 103.965…

Non è nemmeno difficile procedere per via analitica: una primitiva della funzione integranda è infatti

$$300 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot ln\left(1+e^{-2x}\right)\right)$$

e dunque l'integrale richiesto vale precisamente

$150 \cdot ln(2) \approx 103.972077$.

Quesito B7 – Cinque circonferenze

Risposta: 181.

Indicando con a la lunghezza (in mm) del raggio delle prime tre circonferenze e con b quella del raggio della circonferenza più piccola, si ha $a = (a + b) \cdot \cos(30°)$, da cui $a = (3 + 2\sqrt{3}) \cdot b$.
Infatti, i centri delle tre circonferenze congruenti sono i vertici di un triangolo equilatero, i cui angoli sono bisecati dalle semirette che partono da tali centri e passano per il centro della circonferenza più piccola (che è anche il centro di quella più grande).
La lunghezza del raggio della circonferenza più grande è dunque $2a + b = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot b \approx 181.07$ mm.

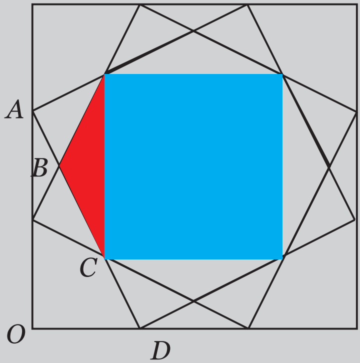
Quesito B8 – Altri cammini del Re

Risposta: 3432.
Tutti i percorsi che conducono il Re a destinazione hanno lunghezza 14; in generale, $2\,(n-1)$ su una scacchiera $n \times n$. Le sequenze di lunghezza $2\,(n-1)$ con lo stesso numero di passi verso l'alto e di passi verso destra sono *comb* $(2\,(n-1), n-1)$, che nel caso $n = 8$ è *comb* $(14, 7) = 3432$.
Ce ne possiamo convincere proprio dal fatto che $n-1$ passi devono essere verso l'alto e altrettanti verso destra, e le permutazioni con ripetizione di $2\,(n-1)$ elementi, metà dei quali di un tipo e metà di un altro tipo, sono proprio

$$(2\,(n-1))!\ /\ ((n-1)!\,(n-1)!),$$

nel caso in esame $14!\ /\ (7!\ 7!) = 3432$, il numero che si trova al centro della riga 14 del ***triangolo di Tartaglia***. Anche nella soluzione del quesito 2 della prima selezione si faceva riferimento a questo "*triangolo*": quale relazione sussiste tra i due problemi?
Nota. *Ricordiamo che* ***comb (n, k) = n! / (k! (n – k)!)*** *è il numero di combinazioni di n elementi presi a gruppi di k.*

Quesito B9 – L'area di un ottagono



Risposta: 150.
Chiaramente, si tratta di un ottagono non regolare. Fissando un riferimento cartesiano monometrico con origine in O, come nella figura a lato, con unità pari a 1 cm, si ha

$A = (0, 12)$; $D = (6, 0)$;
$C = (4, 4)$; $B = (3/2, 9)$.

Dunque, il quadrato centrale colorato ha lato di 10 cm, mentre l'area del triangolo isoscele colorato, espressa in cm^2, è

$$10 \cdot (4 - 3/2)/2 = 25/2.$$

Per simmetria, l'area dell'ottagono, sempre in cm^2, risulta

$$100 + 4 \cdot 25/2 = 150.$$

Quesito B10 – La scelta dei gelati

Risposta: 906.
Marta può scegliere una coppa con 4 gusti alla frutta, *comb* (9, 4) = 126, oppure con 3 gusti alla frutta e uno alla crema, *comb* (9, 3) · 5 = 84 · 5 = 420, oppure con 2 gusti alla frutta e 2 alla crema, *comb* (9, 2) · *comb* (5, 2) = 36 · 10 = 360: ha quindi 126 + 420 + 360 = 906 possibilità.
Giulia può scegliere una coppa con 4 gusti alla crema, *comb* (5, 4) = 5, oppure con 3 gusti alla crema e uno alla frutta, *comb*(5, 3) · 9 = 10 · 9 = 90, oppure con 2 gusti alla crema e 2 alla frutta, *comb* (5, 2) · *comb* (9, 2) = 360 (già calcolato!), oppure con un gusto alla crema e 3 alla frutta, 5 · *comb* (9, 3) = 420 (già calcolato!): ha quindi 5 + 90 + 360 + 420 = 875 possibilità, 31 in meno di Marta.
Tuttavia, per le scelte di Giulia c'è un conteggio più semplice, che consiste nel calcolare tutte le possibili scelte di quattro gusti diversi, senza altri vincoli, e poi sottrarre tutte le scelte di quattro gusti alla frutta: comb(9 + 5, 4) – comb(9, 4) = 1001 – 126 = 875.
Nota. *Ricordiamo che* ***comb (n, k) = n! / (k! (n – k)!)*** *è il numero di combinazioni di n elementi presi a gruppi di k.*

Quesito B11 – La cifra cancellata

Risposta: 6.
Infatti, la radice quadrata di 640494863 è 25307,99998…; 25307 × 25309 = 640494863, e (25307, 25309) è, per la precisione, la 412-esima coppia di ***numeri primi gemelli***.
Qualsiasi altra cifra mettessimo al primo posto, non otterremmo un analogo risultato: il numero ottenuto non sarebbe il prodotto di due numeri la cui differenza, in valore assoluto, sia 2.

I numeri primi gemelli sono stati oggetto di alcuni esercizi "di allenamento" proposti nell'edizione "sperimentale" del 2022; potete trovarli alle pagine 13-14 e 35-36 (con una nota storica) del libretto "Testi e soluzioni della Coppa Student 2022".

Quesito B12 – Crescita di una popolazione: il modello logistico

Risposta: 2071.
Mediante il foglio di calcolo o con un programma in Python, ad esempio:

```
def f(t, y):
    return 0.025*y*(1.0 - y/11.2)

h = 1.0
t = 0.0
y = 8.074
for i in range(1, 52):
    y += h*f(t, y)
    t += h
    print(2024 + t, y)
```

(si osservi che, in questo caso, f dipende soltanto da y e non esplicitamente da t), si ottiene la sequenza:

2025.0	8.13033777679
2026.0	8.18604623825
2027.0	8.24111848123
2028.0	8.29554815348
2029.0	8.34932944846
2030.0	8.40245709932
2031.0	8.4549263721
2032.0	8.50673305828
...	
2068.0	9.93117049265
2069.0	9.95929764034
2070.0	9.98687916731
2071.0	10.013922228
2072.0	10.0404340373
2073.0	10.0664218622
2074.0	10.0918930134
2075.0	10.1168548374

*Qui abbiamo proposto un programma in Python, ma con la calcolatrice **CASIO fx-CG50** è molto più semplice usare la funzione "**Ricorsione**", scrivendo la successione*

$$a_{n+1} = a_n + 0.025 \cdot a_n \cdot (1 - a_n / 11.2), \text{ con } a_0 = 8.074.$$

Poiché a_{47} è il primo termine maggiore di 10, l'anno cercato è

$$2024 + 47 = 2071.$$

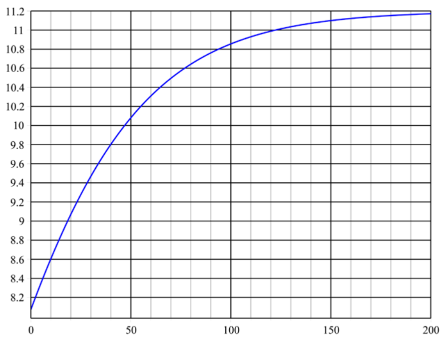
La soluzione esatta dell'equazione differenziale data è

$$p(t) = M / (1 + (M / p(0) - 1) \cdot \exp(-k \cdot t)),$$

dove p(0) è il numero di individui al tempo 0 (qui assunto all'inizio dell'anno 2024).

Con $M = 11.2$, $p(0) = 8.074$ e $k = 0.025$, imponendo $p(t) = 10$, si ottiene $t \approx 46.85$, concordante con la simulazione numerica, in quanto $2024 + 46.85 = 2070.85$, maggiore di 2070 ma minore di 2071.

Secondo questo modello p(t) tende a M per t tendente a $+\infty$, come si può verificare anche in base all'equazione differenziale data, studiando i punti di equilibrio.



Nel grafico qui a lato è mostrata la crescita della popolazione mondiale, secondo il modello logistico con i parametri scelti, dal 2024 (ascissa 0) al 2224 (ascissa 200).

Il modello logistico fu proposto dal matematico belga Pierre François Verhulst nel 1838; egli aggiunse un termine al modello introdotto quarant'anni prima dall'economista inglese Thomas Robert Malthus, che prevedeva soltanto una crescita esponenziale (che pur può essere valida, in alcuni casi, almeno per un certo intervallo di tempo), secondo l'equazione $dp(t) / dt = k \cdot p(t)$, risolta da $p(t) = p(0) \cdot \exp(k \cdot t)$. Qui il tasso di crescita è semplicemente k, costante.

Il termine (non lineare) $-k \cdot p(t)^2/M$ limita comunque la crescita, tenendo conto della disponibilità di risorse alimentari e di altri fattori ambientali, sebbene la specie in questione non sia soggetta all'azione di altre specie predatrici.

Per quanto concerne la specie umana, i dati sono allarmanti; ce ne possiamo accorgere riportando in un grafico, in scala, gli anni 1659, 1804, 1927, 1974, 2022 in ascisse e, in ordinate, rispettivamente, 0.5, 1, 2, 4, 8 miliardi di persone! È un dato di fatto che nell'ultimo mezzo secolo la popolazione sia più che raddoppiata. Secondo l'Organizzazione delle Nazioni Unite, arriverà a 8.5 miliardi nel 2030, a 9.7 miliardi nel 2050, si assesterà poi a 10.3 miliardi alla metà degli anni 2080 e calerà a 10.2 miliardi alla fine di questo secolo XXI; altre fonti prevedono il traguardo dei 10 miliardi già nel 2050, o una punta di 9.7 miliardi verso il 2065 seguita poi da un sensibile calo a 8.8 miliardi alla fine del secolo: chi avrà ragione? Lo scoprirete a tempo debito…

Soluzioni della finale nazionale

8 maggio 2025

Quesito C1 – Scacchiere dispari

Risposta: 9661.
Le case nere che si trovano agli incroci tra le colonne dispari e le traverse dispari della scacchiera numero n formano un quadrato $n \times n$, mentre le case nere che si trovano agli incroci tra le colonne pari e le traverse pari della stessa scacchiera formano un quadrato $(n - 1) \times (n - 1)$; in tutto, dunque, le case nere sono $n^2 + (n - 1)^2$.
Per $n = 70$, si ha $70^2 + 69^2 = 4900 + 4761 = 9661$.

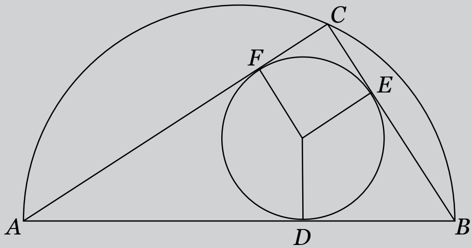
Quesito C2 – Un triangolo rettangolo

Risposta: 2672.
Chiamati rispettivamente R e r i due raggi dati, con riferimento alla figura sotto riportata, si ha:

$$AD = AF = a,\ \ BD = BE = b,\ \ CE = CF = r,\ \ a + b = 2R.$$

Dunque, il perimetro del triangolo misura

$$2(a + b + r) = 2\,(2R + r) = 2(2 \cdot 562 + 212)\text{ mm} = 2672\text{ mm}.$$



Quesito C3 – Il più grande divisore

Risposta: 2304.
In effetti, $2^{29} - 1 = 536870911$ è scomponibile nel prodotto di tre numeri primi, che sono 233, 1103 e 2089; ma, per rispondere correttamente al quesito, basta individuare il più piccolo divisore (233): dividendo per esso il numero dato, si ottiene il suo divisore più grande (2304167).

*I numeri della forma $2^n - 1$ sono detti **numeri di Mersenne** e indicati con M_n. Se M_n è primo, allora anche n è primo, ma il viceversa non sempre è vero, come testimonia il caso sopra considerato. Vi consigliamo una ricerca in rete sui numeri di Mersenne che sono primi. Invece, i grandi numeri che sono scomponibili nel prodotto di due soli, e sempre grandi, numeri primi hanno (almeno tuttora) una notevole importanza in crittografia.*

Quesito C4 – Una porzione di successione

Risposta: 4495.

Considerando una funzione logaritmo, in una base a piacere, si ha:

$$6 \cdot \log(129) < 15 \cdot \log(7) < 6 \cdot \log(130)$$
$$6 \cdot \log(160) < 17 \cdot \log(6) < 6 \cdot \log(161)$$

e la somma dei numeri da 130 a 160 compresi è

$$30 \cdot 31/2 + 130 \cdot 31 = 4495.$$

Una soluzione alternativa, più semplice in quanto impiega soltanto radici e potenze, evitando i logaritmi, inizia constatando che

$$7^{15} < k^6 < 6^{17} \text{ equivale a } 7^{15/6} < k < 6^{17/6},$$
$$\text{dove } 7^{15/6} = 7^{5/2} \approx 129.6 \text{ e } 6^{17/6} \approx 160.2.$$

Quesito C5 – Da un mazzo di carte

Risposta: 1079.

La risposta è il prodotto 13×83.

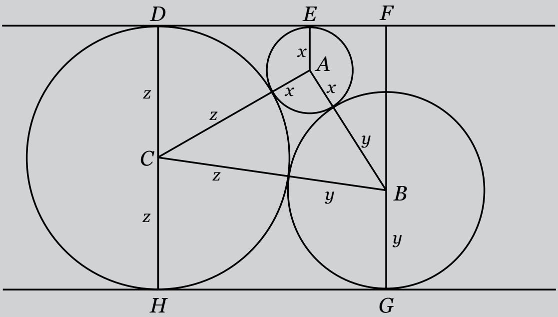
1. Poiché 12 sono le figure nel mazzo, il parametro *p* dell'esperimento di Bernoulli è 12/40 = 0.3. La probabilità di estrarre esattamente tre figure è dunque $comb\ (5, 3) \cdot 0.3^3 \cdot (1 - 0.3)^{5-3} = 0.1323$, ossia poco più del 13%.
2. Anziché sommare le probabilità di estrarre esattamente 1, 2, 3, 4 o 5 figure, si fa più presto a calcolare la probabilità dell'evento contrario, ossia di non estrarre alcuna figura: $comb\ (5, 0) \cdot 0.3^0 \cdot (1 - 0.3)^{5-0} = 0.7^5 = 0.16807$, per poi sottrarla da 1: 1 – 0.16807 = 0.83193, ossia poco più dell'83%.

***Nota.** Ricordiamo che comb (n, k) = n! / (k! (n – k)!) è il numero di combinazioni di n elementi presi a gruppi di k.*

Si osservi che, qualora la carta estratta non fosse reintrodotta nel mazzo, l'esperimento non sarebbe di Bernoulli, poiché la probabilità di estrarre una figura cambierebbe ad ogni successiva estrazione.

Quesito C6 – Tre circonferenze tra due parallele

Risposta: **84.**
Con riferimento alla figura qui sotto, indicando le lunghezze dei segmenti con le lettere associate ai loro estremi e quelle dei raggi dati con x e y e del raggio incognito con z, si ha:



- $DE^2 = AC^2 - (CD - AE)^2 = (z + x)^2 - (z - x)^2 = 4zx$
- $EF^2 = AB^2 - (FG - BG - AE)^2 = (x + y)^2 - (2z - y - x)^2 = 4z \cdot (x + y - z)$, essendo $z < x + y$
- $GH^2 = BC^2 - (CH - BG)^2 = (z + y)^2 - (z - y)^2 = 4zy$

da cui, essendo $EF^2 = (GH - DE)^2$, si ricava:

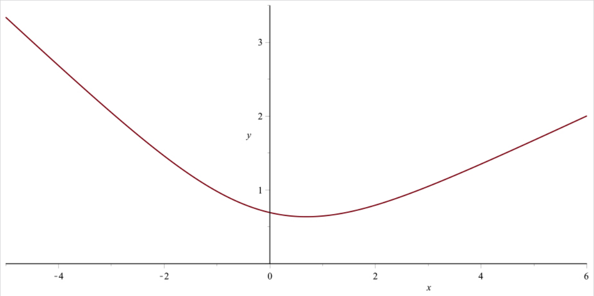
$$4zx + 4zy - 4z^2 = 4zy + 4zx - 2 \cdot (2 \cdot \sqrt{zy}) \cdot (2 \cdot \sqrt{zx})$$

e pertanto $z = 2 \cdot \sqrt{xy} = 2 \cdot \sqrt{1764} = 2 \cdot 42 = 84$.

Quesito C7 – Boomerang!

Risposta: **192.**
Mediante la calcolatrice ***CASIO fx-CG50*** possiamo calcolare i due integrali definiti: entrambi risultano circa 15.969, da approssimare con 16. In effetti, essi presentano non solo gli stessi limiti di integrazione, ma anche la stessa funzione integranda, il cui

grafico (che, in parte, giustifica il titolo) è mostrato in figura.



Per provare quanto affermato, deriviamo entrambe le funzioni integrande date, che sono definite e derivabili per ogni x reale, ottenendo, rispettivamente:

$$-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{1}{3} \qquad\qquad \frac{e^{x}}{1+e^{x}}-\frac{2}{3}$$

Con pochi passaggi algebrici, e ricordando le proprietà delle potenze, è facile constatare che queste due espressioni si equivalgono per ogni x reale. Entrambe le funzioni integrande assumono valore ln(2) per $x = 0$, e allora ciò basta per concludere che sono in realtà due diverse espressioni che denotano la stessa funzione.
L'uguaglianza delle due funzioni integrande può essere provata anche in modo diretto:

$$ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{x}{3}=ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)+\frac{x}{3}=$$
$$ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}}\right)+\frac{x}{3}=ln\left(1+e^{x}\right)-ln\left(e^{x}\right)+\frac{x}{3}=$$
$$ln\left(1+e^{x}\right)-x+\frac{x}{3}=ln\left(1+e^{x}\right)-\frac{2x}{3}$$

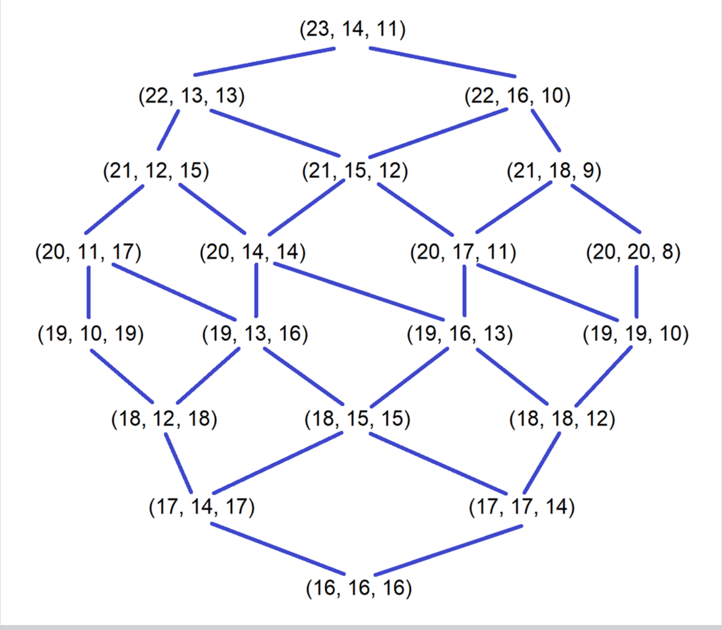
Questa funzione (potendo dunque parlare al singolare) ha un minimo assoluto in $x = -\ln(1/2) \approx 0.693$, dove la sua derivata si annulla, mentre per $x = 0$ la sua derivata vale $-1/6$: anche questo calcolo può essere fatto sfruttando le potenzialità della calcolatrice ***CASIO fx-CG50***! Qualora invece vi chiedeste quale possa essere una primitiva di questa funzione, documentatevi

sulla funzione chiamata ***dilogaritmo***…
In conclusione, la risposta al nostro quesito è

$$(16 + 16) \ / \ (1/6) = 192.$$

Quesito C8 – Incontri fra camaleonti

Risposta: 245.
Indicando il numero di camaleonti di un colore con la lettera iniziale del colore stesso, notiamo anzitutto che, dalla terna (v, a, g), dopo un incontro si può avere $(v-1, a-1, g+2)$, purché v e a siano positivi, oppure $(v-1, a+2, g-1)$, purché v e g siano positivi, oppure $(v+2, a-1, g-1)$, purché a e g siano positivi: dunque, si passa a una terna di numeri congruenti modulo 3 se e soltanto se v, a e g sono a loro volta congruenti modulo 3. Nel caso in esame, 23, 14 e 11 hanno resto 2 (modulo 3), e quindi esiste almeno una sequenza di incontri che permette di arrivare a 16, 16 e 16 (con resto 1); più precisamente, ve ne sono 35, ciascuna di 7 incontri, che è il minimo possibile in quanto 23 – 16 = 7: si osservi il seguente diagramma.



La risposta da dare è dunque $7 \times 35 = 245$.
Si noti che, anche qualora i numeri di camaleonti cambiassero, la risposta alla prima domanda sarebbe data dal maggiore dei tre numeri meno la somma dei tre divisa per 3… purché il problema ammetta una soluzione, ovvero che i tre numeri siano congruenti modulo 3.

Quesito C9 – Addizioni, sottrazioni e scambi

Risposta: 35.
Anzitutto, si può dimostrare che, applicando ripetutamente le regole 2 e (quando necessario) 3, in un numero finito di passi si perviene a una coppia la cui prima componente è 0, mentre la seconda è il massimo comun divisore della coppia di partenza (e anche delle successive alle quali si è giunti); se la seconda componente è 1, i due numeri della coppia di partenza (e delle successive) sono primi fra loro. Ad esempio, partendo da (11319, 3612) e, per chiarezza, ponendo a pedice della freccia il numero della regola applicata:

$(11319, 3612) \to_2 (7707, 3612) \to_2 (4095, 3612) \to_2 (483, 3612) \to_3$
$(3612, 483) \to_2 (3129, 483) \to_2 (2646, 483) \to_2 (2163, 483) \to_2$
$(1680, 483) \to_2 (1197, 483) \to_2 (714, 483) \to_2 (231, 483) \to_3$
$(483, 231) \to_2 (252, 231) \to_2 (21, 231) \to_3 (231, 21) \to_2 (210, 21) \to_2$
$(189, 21) \to_2 (168, 21) \to_2 (147, 21) \to_2 (126, 21) \to_2 (105, 21) \to_2$
$(84, 21) \to_2 (63, 21) \to_2 (42, 21) \to_2 (21, 21) \to_2 (0, 21)$

dopodiché si potrà passare alla coppia (21, 0), mediante la regola 3, o tornare indietro, grazie alla regola 1.
In effetti, $11319 = 3 \cdot 7^3 \cdot 11$ e $3612 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$, e il loro massimo comun divisore è $3 \cdot 7 = 21$.
Partendo dall'altra coppia data:

$(6783, 3045) \to_2 (3738, 3045) \to_2 (693, 3045) \to_3 (3045, 693) \to_2$
$(2352, 693) \to_2 (1659, 693) \to_2 (966, 693) \to_2 (273, 693) \to_3$
$(693, 273) \to_2 (420, 273) \to_2 (147, 273) \to_3 (273, 147) \to_2$
$(126, 147) \to_3 (147, 126) \to_2 (21, 126) \to_3 (126, 21) \to_2 (105, 21) \to_2$

$(84, 21) \to_2 (63, 21) \to_2 (42, 21) \to_2 (21, 21) \to_2 (0, 21)$

si giunge di nuovo a (0, 21); infatti

$$6783 = 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \text{ e } 3045 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29.$$

Notiamo che le due sequenze hanno una sotto-sequenza propria (suffissa) in comune, dalla coppia (126, 21) in poi; allora, partendo da (11319, 3612), si può giungere a (126, 21) in 20 passi, come mostrato sopra, dopodiché si può risalire a (6783, 3045): basta applicare una volta la regola 3, per passare da (126, 21) a (21, 126), e poi rovesciare la sequenza che da (6783, 3045) porta a (21, 126), sostituendo le 14 applicazioni della regola 2 con altrettante applicazioni della regola 1:

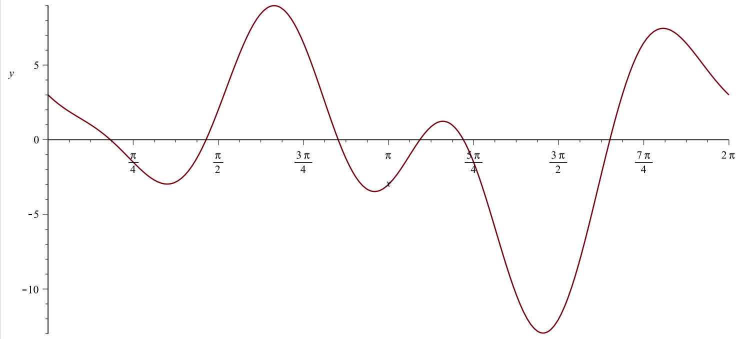
$(21, 126) \to_1 (147, 126) \to_3 (126, 147) \to_1 (273, 147) \to_3$
$(147, 273) \to_1 (420, 273) \to_1 (693, 273) \to_3 (273, 693) \to_1$
$(966, 693) \to_1 (1659, 693) \to_1 (2352, 693) \to_1 (3045, 693) \to_3$
$(693, 3045) \to_1 (3738, 3045) \to_1 (6783, 3045).$

Quindi, in tutto, i passi sono 20 + 1 + 14 = 35.
Mediante le regole date, è possibile passare da una coppia a un'altra se e soltanto se esse hanno lo stesso massimo comun divisore (nel caso del quesito, 21).
Riconsideriamo le due coppie date nel testo. Potremmo anche chiederci se è possibile passare dall'una all'altra "risalendo" (mediante le regole 1 e 3) a una coppia "antenata comune", anziché transitare per la coppia (126, 21), "discendente comune"; si può dimostrare che non è possibile, poiché nessuna delle due coppie date sta sulla sequenza "discendente" (prodotta dall'applicazione della regola 2 o, quando questa non è applicabile, della regola 3) dell'altra coppia…
Un caso particolare è costituito dalla coppia (0, 0), alla quale non si perviene da nessun'altra coppia e sulla quale si rimane – se da lì si parte – applicando una qualsiasi delle tre regole: è quindi un punto fisso isolato della trasformazione qui proposta; naturalmente il massimo comun divisore di questa coppia non è definito.

Nota storica. Il calcolo che usa le regole 2 e 3 rispecchia il noto metodo di Euclide per trovare il massimo comun divisore: si tratta di uno dei più antichi procedimenti di calcolo non banali definiti in astratto, cioè senza riferirsi a casi specifici, ma ancora in linguaggio naturale; un altro esempio, più o meno coevo (tra il IV e il III secolo a. C.), è il crivello di Eratostene, che lascia i soli numeri primi, partendo dalla successione dei naturali maggiori di 1.
Si noti che una sequenza massimale di applicazioni della regola 2 è conclusa da una coppia la cui prima componente è il resto della divisione tra le due componenti della coppia iniziale. Grazie all'algoritmo euclideo si può provare, ad esempio, l'identità di Bézout (matematico francese del '700): se d è il massimo comun divisore di a e b, allora esistono due interi (l'uno o l'altro possibilmente negativo) p e q tali che $p \cdot a + q \cdot b = d$.

Quesito C10 – L'immagine di una funzione periodica

Risposta: 22.
Il periodo della funzione è 2π (radianti) e il suo grafico da 0 a 2π è mostrato nella seguente figura, in cui le ordinate vanno da –13 a 9.



In effetti, mediante la calcolatrice grafica ***CASIO fx-CG50,*** si può verificare che il valore massimo assoluto della funzione è circa 8.98, in prossimità di $x \approx 2.09$, mentre il valore minimo assoluto è circa –12.95, in prossimità di $x \approx 4.57$ (sempre riportando le ascisse in radianti).

Quesito C11 – Un prato d'erba medica

Risposta: **905.**
Generalizzando, indichiamo con n il numero di pecore, con Q la quantità d'erba alla mattina del lunedì, e con q la quantità d'erba mangiata da una pecora durante la giornata; inoltre, poniamo $a = n \cdot q$ e $b = 1 + p/100$. Possiamo dunque scrivere una relazione di ricorrenza:

$$Q_0 = Q \qquad Q_{i+1} = (Q_i - a) \cdot b \qquad \textbf{(1)}$$

per esprimere le quantità d'erba Q_k alla mattina del giorno k (da $k = 0$, il lunedì, sino a $k = 4$, il venerdì).
Con $n - 1$ pecore, basta porre $a' = (n - 1) \cdot q$ e

$$Q_0' = Q \qquad Q_{i+1}' = (Q_i' - a') \cdot b \qquad \textbf{(2)}$$

arrivando a calcolare anche Q_5', che dovrà uguagliare Q_4.
Svolgendo i calcoli in avanti, $Q_4 = Q_5'$ porta a:

$$(Q - a) \cdot b^4 - a \cdot b^3 - a \cdot b^2 - a \cdot b =$$
$$(Q - a') \cdot b^5 - a' \cdot b^4 - a' \cdot b^3 - a' \cdot b^2 - a' \cdot b$$

da cui, dividendo per b (> 1) e tenendo presente che $a - a' = q$, fatti pochi passaggi otteniamo un'equazione di quarto grado in b:

$$(Q - (n - 1) \cdot q) \cdot b^4 - (Q - q) \cdot b^3 + q \cdot b^2 + q \cdot b + q = 0$$

che, con i dati a nostra disposizione, diventa:

$$65 \cdot b^4 - 81 \cdot b^3 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot b + 4 = 0.$$

Risolvendola con la nostra calcolatrice ***CASIO fx-CG50***, vediamo che la sola soluzione accettabile, reale e maggiore di 1, è circa 1.090528461, e dunque p è approssimato con 9.05.
Osserviamo infine che l'ultima mattina, il venerdì se le pecore sono sei o il sabato se sono cinque, vi sarà meno di mezzo chilogrammo d'erba nel prato, sicché le pecore dovranno migrare altrove, mentre sino al giorno precedente avevano trovato erba a sufficienza per l'intera giornata!

Un procedimento alternativo, e più generale, consiste nel risolvere la relazione di ricorrenza **(1)**, *che è di ordine 1, lineare, non omogenea, giungendo ad esplicitare*

$$Q_k = (Q - a \cdot b / (b-1)) \cdot b^k + a \cdot b / (b-1)$$

per ogni k intero ≥ 0. L'espressione di Q_k', *soluzione della relazione* **(2)**, *è la stessa, con a' al posto di a.*
Imponendo $Q_4 = Q_5'$ *e sfruttando i dati disponibili, si perviene a un'equazione di quinto grado in b:*

$$65 \cdot b^5 - 146 \cdot b^4 + 85 \cdot b^3 - 4 = 0$$

che, risolta con la calcolatrice, mostra ancora l'unica soluzione accettabile 1.090528461. Con questo valore di b, possiamo prontamente calcolare le approssimazioni:

$Q_3 = 24.397$ *(le 6 pecore hanno ancora erba sufficiente il giovedì),*
$Q_4 = 0.4329$ *(ma non più il venerdì);*
$Q_4' = 20.397$ *(le 5 pecore hanno ancora erba sufficiente il venerdì),*
$Q_5' = 0.4329$ *(ma non più il sabato).*

Quesito C12 – Cambiamonete

Risposta: 4562.
La risposta si ottiene eseguendo questo programma in Python, con una funzione che ricorre in due punti:

```
tagli = [50, 20, 10, 5, 2, 1]
n = len(tagli)

def cambia (somma, tagli, i, n):
    if somma < 0 or i == n: return 0
    if somma == 0: return 1
    a = cambia(somma-tagli[i], tagli, i, n)
    b = cambia(somma, tagli, i+1, n)
    return a + b

print(cambia(100, tagli, 0, n))
```

Avendo n tagli, indiciati da 0 a $n - 1$, non importa in quale ordine, dobbiamo anzitutto controllare se siamo in uno dei “casi base”: se la somma (rimasta) da cambiare è negativa o non abbiamo (altri) tagli da considerare, allora non ci sono (altri) modi per soddisfare la richiesta; altrimenti, se la somma (rimasta) da cambiare è 0, allora il modo è uno solo.
Se non ci troviamo in uno di questi casi, calcoliamo in quanti modi possiamo cambiare la somma (rimasta) provando a togliere da questa una moneta del taglio corrente e calcoliamo anche in quanti modi possiamo cambiare la somma (rimasta) non usando nessuna moneta del taglio corrente: sommiamo infine le due quantità così calcolate per ottenere il risultato (parziale).
In effetti, si potrebbe formulare una soluzione “più matematica”, se la calcolatrice fosse in grado di eseguire sommatorie di sommatorie… Tuttavia, per rendere più rapida la scrittura dei programmi in Python, la calcolatrice **CASIO fx-CG50** *dispone di un tasto che permette di scrivere “for i in range():” e questo può rivelarsi di grande aiuto pensando di risolvere il problema mediante il seguente programma alternativo:*

```
s = 100  # la somma (iniziale) da cambiare
ris = 0
for a in range(int(s/50)+1):
  for b in range(int((s-50*a)/20)+1):
    for c in range(int((s-50*a-20*b)/10)+1):
      for d in range(int((s-50*a-20*b-10*c)/5)+1):
        for e in range(int((s-50*a-20*b-10*c-5*d)/2)+1):
          ris += 1
print(ris)
```

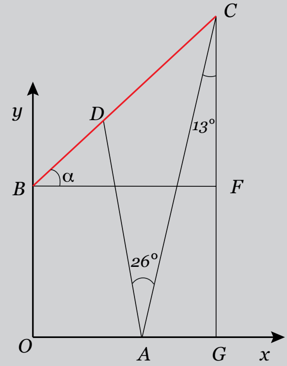
che fornisce lo stesso risultato, 4562. Sembra più lungo da scrivere, rispetto al precedente, ma all'atto pratico non lo è, se si sfrutta quel tasto della calcolatrice!
Un'osservazione è però doverosa: dal punto di vista informatico, il primo programma è di gran lunga preferibile, poiché più generale (ed elegante); infatti, se cambiano i tagli disponibili, in numero o in valore, è sufficiente modificare la lista scritta nella prima linea di codice (ove per giunta, come si è detto, i tagli non debbono essere elencati in alcun ordine particolare).

*L'idea risolutiva su cui si fonda il primo programma qui presentato è quella della **programmazione dinamica**, una tecnica assai versatile concepita da **Richard E. Bellman** intorno alla metà degli anni '50 del Novecento. Il nome "programmazione dinamica" non ha diretta connessione con la stesura di codici per computer: tale procedimento fu infatti pensato per l'ottimizzazione di processi multi-stadio, in particolare per quelli la cui evoluzione (nel tempo) possa essere descritta da un grafo orientato privo di cicli.*

Quesito C13 – Quando si vedrà la luce?

Risposta: **37.**

L'angolo limite richiesto è indicato con α nella figura a fianco.



Indicando le lunghezze dei segmenti con le lettere associate ai loro estremi, possiamo scrivere:

$$BF = BC \cdot \cos(\alpha) = BC \;/\; \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}$$

e anche:

$$CG = CF + FG = BF \cdot \tan(\alpha) + OB =$$
$$\tan(90° - 26°/2) \cdot AG = \tan(77°) \cdot (BF - OA)$$

da cui: $BF \cdot (\tan(77°) - \tan(\alpha)) = OA \cdot \tan(77°) + OB$

Sostituendovi l'espressione di BF sopra ricavata ed elevando al quadrato, si giunge a un'equazione di secondo grado in $\tan(\alpha)$:

$$BC^2 \cdot (\tan(77°) - \tan(\alpha))^2 = (1 + \tan^2(\alpha)) \cdot (OA \cdot \tan(77°) + OB)^2$$

ossia:

$$((OA \cdot \tan(77°) + OB)^2 - BC^2) \cdot \tan^2(\alpha) + 2 \cdot BC^2 \cdot \tan(77°) \cdot \tan(\alpha)$$
$$- BC^2 \cdot \tan^2(77°) + (OA \cdot \tan(77°) + OB)^2 = 0$$

Con i valori dati, la sola soluzione accettabile è

$$\tan(\alpha) \approx 0.754898, \text{ e dunque } \alpha \approx 37.049°.$$

Proponiamo una soluzione alternativa, che evita di formulare un'equazione di secondo grado. Tracciamo la parallela all'asse y passante per A, indichiamo con E il punto in cui interseca il segmento DC e calcoliamo gli angoli:

$DAE = 26°/2 = 13°$

$OAD = 90° – DAE = 90° – 13° = 77°$

$OAB = atan(80/56) = atan(10/7)$

$BAD = OAD – OAB = 77° – atan(10/7)$

$BAC = BAD + DAC = 77° – atan(10/7) + 26° = 103° – atan(10/7)$

$ABC = 180° – BAC – ACB = 180° – 103° + atan(10/7) – ACB = 77° + atan(10/7) – ACB$

$OBA = atan(56/80) = atan(7/10)$

$OBC = OBA + ABC = atan(7/10) + 77° + atan(10/7) – ACB = 90° + 77° – ACB$

$\alpha = OBC – 90° = 77° – ACB.$

L'angolo ACB può essere determinato in base al teorema dei seni applicato al triangolo ABC: sin(BAC)/BC = sin(ACB)/AB, da cui

$ACB = asin(sin(BAC) \cdot AB/BC) =$

$asin(sin(103° – atan(10/7)) \cdot (\sqrt{80^2 + 56^2} / 113) \approx 39.95°.$

In conclusione, $\alpha = 77° – ACB \approx 37.05°.$

Note

Note

Finito di stampare
nel mese di aprile 2025
per conto di
Associazione Culturale Kangourou Italia
presso *Arti Grafiche Bianca & Volta*
via del Santuario 2
Truccazzano (MI)
ISBN: 978 - 88 - 89249 - 81 - 9

Kangourou Italia opera con il patrocinio

- *dell'Istituto Internazionale Edoardo Agnelli*
- *del Comune di Cesenatico*
- *del Comune di Cervia*