Testi e soluzioni della Coppa Student 2026

ISBN: 979-12-81294-07-3
€ 15.00

Coppa Student 2026

L'Associazione Culturale Kangourou Italia opera in convenzione con:

- **Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques"** dell'Università degli Studi di Milano
- **DIMA** - Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Genova
- **FIM** - Dipartimento di Scienze fisiche, informatiche e matematiche dell'Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
- **Dipartimento di Matematica** dell'Università di Salerno

Per informazioni: tel. (+39) 347 040 27 55
E-mail: matematica@kangourou.it
Sito: https://www.kangourou.it

In copertina: **Tobia Ravà** "*Vessillo apotropaico*" per il Palio di Feltre 2024

via Giacomo Medici 2 – 20900 Monza (MB)
Partita IVA 09638180969

ISBN: 979-12-81294-07-3

Ringraziamenti:

- **CASIO** che ha offerto quattro webinar di formazione per docenti e concorrenti, specialmente dedicati alla Coppa Student, e le favolose calcolatrici **FX - CG50**, oltre al supporto per la divulgazione dell'evento;
- Il **Comune di Cervia** che ci sostiene e discute con noi per un prolungamento della disponibilità del Palazzetto dello Sport;
- **Miriam, Matteo, Michela** e il personale dell'**Agenzia Arcadia di Cesenatico**;
- **Lorenzo Repetto** con **Simone Muselli** per i testi e le soluzioni dei quesiti;
- Tutti i miei collaboratori, **Cristina** alla segreteria, i tecnici **Pamela**, **Pietro**, **Alberto** e **Alessandra,** lo staff sempre presente **Elisabetta**, **Giovanni, Paola M., Aurelia** e **Diego, Chiara,** il Dipartimento di Matematica di Milano con **Paola C., Clemente, Stefania**;
- **Federico Risi**, il responsabile del Palazzetto di Cervia.

Buon gioco a tutti.

Prof. Angelo LISSONI
Presidente Associazione Culturale
Kangourou Italia

Milano, 9 aprile 2026

Testi della prima selezione

13 marzo 2026

Quesito A1 – Un trinomio

Per quali valori interi di x il trinomio $x^2 - 16x + 55$ è uguale a un numero primo?
Scrivete la somma di tali valori.

Quesito A2 – Tre regalini

Lisa acquista tre regalini per le sue amichette. Avendo già studiato un po' di matematica, ella osserva che i tre diversi prezzi, in euro, sono numeri primi, e così pure le differenze tra il maggiore e ciascuno degli altri due e la differenza tra quello mediano e il minore.
Quanti euro ha speso in totale?

Quesito A3 – La somma delle cifre

Qual è la somma delle cifre del numero $(10^{37} - 1)^2$, espresso nell'usuale notazione decimale?

Quesito A4 – Gli investimenti di Nico

Esattamente tre anni fa, disponendo di 132.000 euro, Nico fece diversi investimenti:

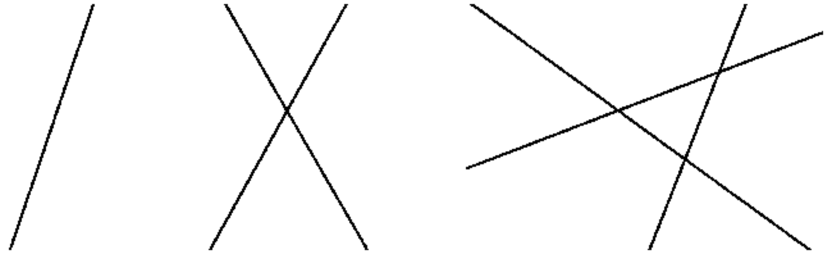
- il 35% della somma allora disponibile ha reso, nell'arco dei tre anni, l'8%;
- il 15% ha reso il 6% il primo anno, il 4% (della somma risultante alla fine del primo anno) il secondo anno, ma ha perduto il 2% (della somma risultante alla fine del secondo anno) il terzo anno;
- il 25% ha reso lo 0,9% ogni trimestre, calcolato – oltre che sulla parte di capitale investita – anche sugli interessi man mano aggiunti (e capitalizzati);
- il 20% della somma allora disponibile è stata impiegata in un affare che ha perduto il 4% il primo anno: pertanto, alla fine

del primo anno, Nico ha ritirato quanto restava, aggiungendolo all'investimento precedente (quello con l'interesse composto a cadenza trimestrale).

Quanti euro ha in più Nico, dopo questi investimenti, rispetto ai 132.000 di tre anni fa, supponendo che a questi non sia stato aggiunto né tolto altro? (*Arrotondate la risposta all'euro.*)

Quesito A5 – Rette che si intersecano

Immaginiamo di tracciare n rette sul piano (infinito), in modo tale che non vi siano né due rette parallele, né tre rette che si intersecano in un punto. La figura illustra tre possibili situazioni, con $n = 1, 2, 3$.



Nel caso $n = 1$, il piano è diviso in due regioni; nel caso $n = 2$, in quattro regioni; nel caso $n = 3$, in sette regioni.

In quante regioni sarà diviso il piano tracciando 60 rette?

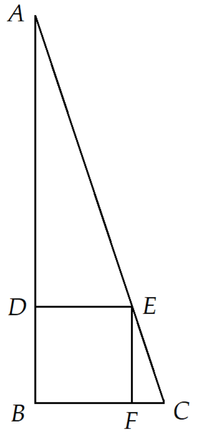
Quesito A6 – Il primo termine di una successione

I termini di una successione numerica sono tali per cui, dal quarto in poi, ciascuno di essi è la media aritmetica di tutti i termini che lo precedono.

Sapendo che il secondo termine è 3.251, il terzo 7.148 e il decimo 5.712, **qual è il primo termine di questa successione?**

Quesito A7 – Triangolo e quadrato

In figura sono rappresentati un triangolo rettangolo *ABC* e il quadrato *BDEF* in esso inscritto.



Sapendo che il segmento *FC* misura 13 cm e che l'area del quadrato è i due terzi di quella del triangolo *ADE*, **calcolate l'area del triangolo *ABC*, in centimetri quadrati.**

Quesito A8 – Tre sfere

La superficie di una sfera misura 59 cm^2, quella di un'altra sfera 73 cm^2. Una terza sfera ha volume pari alla somma dei volumi delle prime due sfere.
Quanti cm^2 misura la superficie della terza sfera? (*Arrotondate il risultato al centimetro quadrato.*)

Quesito A9 – Tra due funzioni

Considerato un riferimento cartesiano monometrico, e tracciati i grafici delle funzioni

$$10 \cdot (1 + x - e^{1-x}) \qquad\qquad 10 \cdot (1 + x + e^{1-x})$$

calcolate l'area della parte di piano compresa tra i due grafici e delimitata dalle rette di equazioni $x = 0$ e $x = 5$, arrotondando il risultato all'unità al quadrato.

Quesito A10 – Il fantasma di mezzanotte

Lungo il corridoio di un antico maniero, immerso nel buio della notte, vi sono quattro finestre. A mezzanotte precisa, un fantasma si affaccia a una di queste finestre (non so quale, ma so che il fantasma la sceglierà a caso, con uguale probabilità); dopo un minuto, si affaccia a una finestra adiacente, e così di seguito, minuto dopo minuto. Per meglio chiarire con un esempio, numerando le finestre da 1 a 4, da sinistra verso destra, se al minuto x il fantasma si affaccia alla finestra 2, al minuto $x + 1$ si affaccerà o alla finestra 1 o alla finestra 3, con uguale probabilità; ma se al minuto $x + 1$ si affaccia alla finestra 1, allora al minuto $x + 2$ dovrà affacciarsi nuovamente alla finestra 2.
Ad ogni minuto, stando all'esterno del maniero, io ho la facoltà di scegliere una finestra, a mio piacere, e di illuminarla, per vedere se, in quel momento, il fantasma è affacciato proprio lì. Ho trovato una sequenza di quattro numeri di finestre da illuminare che mi permette di individuare il fantasma al quarto tentativo, se non prima. Ho anche calcolato esattamente il numero medio atteso di tentativi, chiaramente minore di 4, che ha quattro cifre decimali dopo la virgola.
Date come risposta proprio le quattro cifre decimali dopo la virgola.

Quesito A11 – Calcolo di un'espressione

Qual è il valore della seguente espressione?

$$1000 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \ldots + \frac{1}{996 \cdot 998} + \frac{1}{998 \cdot 1000} \right)$$

Quesito A12 – In quattro tasche

In quanti modi si possono mettere otto monete, di cui quattro da 2 euro (indistinguibili), una da 1 euro, una da 50 centesimi, una da 20 centesimi e una da 10 centesimi, in quattro diverse tasche?

Testi della seconda selezione

9 aprile 2026

Quesito B1 – Quasi primi

Quanti sono i numeri interi n, compresi tra 3 e 10.000, ciascuno dei quali ha un solo divisore d, tale che $1 < d < n$?

Quesito B2 – La maggior somma

Siano a, b, c tre diversi interi positivi tali che $a \cdot b \cdot c = 668.621$.
Determinate il massimo valore possibile della somma $a + b + c$, e date come risposta le sue ultime quattro cifre.

Quesito B3 – La soglia 23

Qual è il minimo valore intero di x in corrispondenza del quale il valore della funzione $f(x) = 4 \cdot \log_7 (x + 28) + 11$ è maggiore di 23?

Quesito B4 – Verdi diversi

Ho una certa quantità di colore giallo, una certa quantità di colore blu e un certo numero n di barattoli vuoti, tutti uguali. Voglio riempire tutti i barattoli, mescolando i due colori, per ottenere diverse gradazioni di verde. Riempio il primo barattolo prendendo 1/8 della quantità disponibile di giallo e 1/10 della quantità disponibile di blu. Alla fine del mio lavoro, avrò utilizzato tutto il colore che ho, sia giallo sia blu.
Quanto vale n ?

Quesito B5 – Permutando quattro cifre

Sono state scelte quattro diverse cifre nell'insieme {1, …, 9}. Si sa che la somma di tutti i diversi numeri interi (di quattro cifre) che si ottengono permutando le quattro cifre scelte è 193.314.
Quanto vale il prodotto delle quattro cifre scelte?

Quesito B6 – Una buona successione

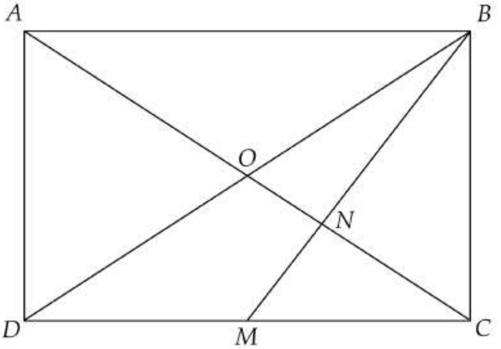
Sia

$$s(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad s(m+n) = s(m) + s(n) + 3 \cdot m \cdot n$$

per ogni m e n interi positivi.
Quanto vale $s(75)$?

Quesito B7 – In un rettangolo

Nel rettangolo *ABCD*, la base *DC* misura 37 metri e l'altezza *AD* 24 metri; sono tracciate le diagonali, che si intersecano nel punto *O*, mentre *M* è il punto di mezzo di *DC*, e *N* il punto di intersezione tra *BM* e *AC*.



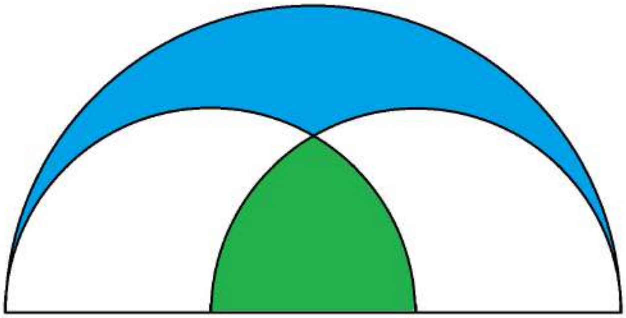
Quanti centimetri misura il segmento *ON*? (*Naturalmente, arrotondate il risultato al centimetro.*)

Quesito B8 – Il cilindro nel cono

Un cilindro (circolare retto) è inscritto in un cono (retto); l'altezza del cilindro è il doppio del raggio della sua base, mentre il raggio della base del cono misura 8,6 cm. Si sa inoltre che la differenza tra l'altezza del cono e quella del cilindro è 14,7 cm.
Di quanti centimetri cubi è il volume del cono? (*Arrotondate il risultato al centimetro cubo.*)

Quesito B9 – Una vetrata a colori

L'immagine mostra una vetrata a colori, delimitata da una semicirconferenza il cui diametro costituisce la base della vetrata; le due semicirconferenze inferiori, di raggio *r*, suddividono la base in tre segmenti di lunghezza *r*.



Sapendo che r = 65 cm, di quanti cm^2 è l'area colorata della vetrata, escludendo le parti bianche?
(*Arrotondate il risultato al centimetro quadrato.*)

Quesito B10 – I numeri in tabella

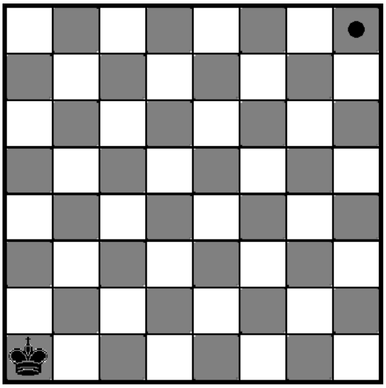
Disponiamo i numeri naturali in una tabella, procedendo per diagonali discendenti da *NE* a *SO*, come appresso mostrato.

```
       0  1  2  3  4  ...
    -------------------
0 |  0  1  3  6 10  ...
1 |  2  4  7 11  ...
2 |  5  8 12  ...
3 |  9 13  ...
4 | 14  ...
... ...
```

Quale numero è collocato nel posto di riga 64, colonna 56?

Quesito B11 – Il Re cammina ancora!

Supponiamo che, sulla classica scacchiera 8×8 e partendo dalla casa *a*1, il Re possa spostarsi, ad ogni passo, di una casa in orizzontale, verso destra (ossia verso Est), oppure di una casa verso l'alto, in verticale (ossia verso Nord), ma senza mai andare al di sopra della diagonale *a*1 − *h*8.



Quanti sono i diversi percorsi che il Re può seguire per arrivare nella casa *h*8, all'angolo opposto?

Quesito B12 – Il tempo di una reazione

Durante una reazione chimica, la quantità q di una certa sostanza si combina con altre, finché in purezza non ne rimane più. È stato verificato che, almeno per quantità intorno a 10 moli, dal momento in cui inizia la reazione, la quantità $q(t)$ diminuisce secondo la formula

$$\mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}t = -\,q(t) - t$$

dove il tempo t è espresso in minuti, valida fino all'estinzione ($q = 0$). Per risolvere numericamente questa equazione differenziale (del prim'ordine, lineare, a coefficienti costanti), applichiamo un noto metodo di integrazione numerica che approssima $y(t)$, soluzione dell'equazione $\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t = f\,(t, y(t))$, agli istanti $t(i) = i \cdot h$ per $i = 0, 1, 2, \ldots$, con la successione

$$y(t(i+1)) = y(t(i)) + (K_1(i) + K_2(i)) \cdot h/2$$

dove

$$K_1(i) = f\,(t(i), y(t(i)))$$
$$K_2(i) = f\,(t(i+1), y(t(i)) + h \cdot K_1(i))$$

dato $y(0)$ e fissato un valore opportuno per il passo h.
In base a questo procedimento di calcolo, assumendo $q(0) = 10$ moli e $h = 0{,}1$, qual è l'ultimo istante t in cui $q(t)$ è maggiore di 0? (*Date la risposta in decimi di minuto; risulterà un intero di sole due cifre.*)

Testi della finale nazionale

11 maggio 2026

Quesito C1 – Un cubo di dadi

Con 64 dadi a sei facce, costruiamo un cubo pieno. Vogliamo massimizzare la somma di tutte le facce visibili su tutte e sei le facce del cubo che stiamo costruendo.
Quanto riusciremo a ottenere al massimo?
(*Ricordiamo che in un dado a sei facce la somma delle facce opposte è sempre 7.*)

Quesito C2 – Dei numeri di cinque cifre…

Consideriamo tutti i numeri interi positivi di cinque cifre, vale a dire i numeri da 10.000 a 99.999. **Se dividiamo ciascuno di essi per 100, e per ciascuna divisione indichiamo con q il quoziente e con r il resto, per quanti di questi numeri la somma $q + r$ risulta divisibile per 7?** (*Date come risposta le ultime quattro cifre del risultato ottenuto.*)

Quesito C3 – L'area massima

Sul piano cartesiano monometrico, si considerino la retta r, passante per i punti (0, 5) e (10, 0), e la circonferenza c, di equazione

$$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0.$$

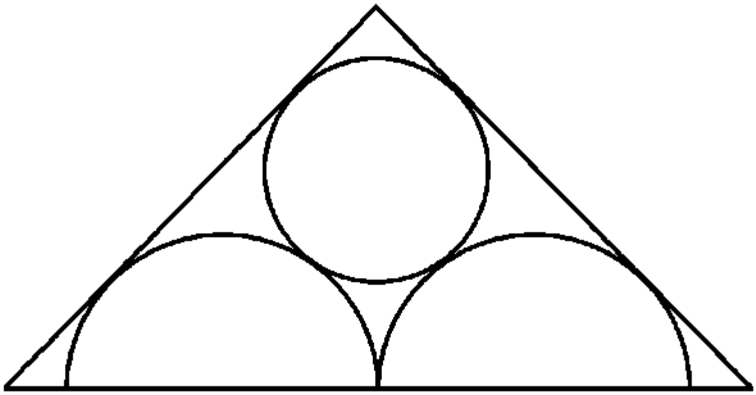
Il triangolo ABC ha il vertice A nel punto (10, 0) e gli altri due, B e C, sulla circonferenza c; uno dei vertici B e C appartiene anche alla retta r.
Qual è il valore della massima area che può avere il triangolo *ABC* ? (*Arrotondate il risultato all'unità al quadrato.*)

Quesito C4 – Successore e doppio

L'anno 2018 portava un numero che è il successore di un numero primo, 2.017, e il doppio di un altro numero primo, 1.009.
Quale sarà il prossimo anno con queste proprietà?

Quesito C5 – Nella metà di un quadrato

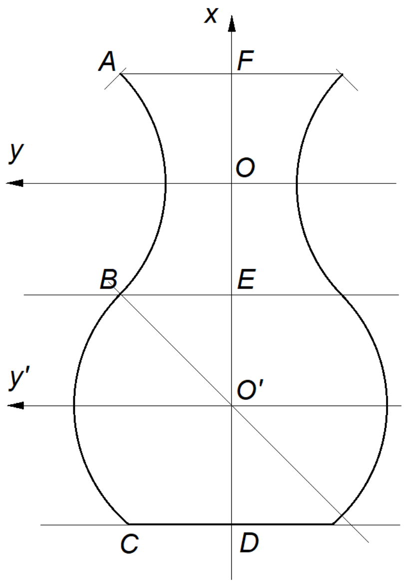
Nella figura è disegnata la metà di un quadrato, nel cui interno vi sono due semicirconferenze di raggio 71 cm, con un punto in comune, il centro del quadrato, e tangenti ognuna a un lato. La circonferenza disegnata al di sopra di esse è tangente a entrambi i lati e a entrambe le semicirconferenze.



Quanti centimetri misura il raggio della circonferenza ? (*Arrotondate il risultato al centimetro.*)

Quesito C6 – Un vaso portafiori

Il volume interno di un vaso portafiori si ottiene dalla figura piana qui sotto disegnata, ruotandola lungo il suo asse (di simmetria) x, orientato verso l'alto.



Nel riferimento cartesiano xOy, l'arco AB è un quarto di una circonferenza di raggio 7 cm, con centro sull'asse y; i punti A e B hanno la stessa y.
Nel riferimento cartesiano $xO'y'$, BC è un arco della circonferenza di centro O' e raggio 7 cm; l'angolo $BO'E$ misura 45° e il segmento $O'D$ 5,3 cm.
Quanti centimetri cubi d'acqua sono necessari per riempire il vaso sino all'orlo? (*Arrotondate il risultato al centimetro cubo.*)
Suggerimento: *suddividete il calcolo in due parti, assumendo per una il riferimento cartesiano xOy, per l'altra xO'y'.*

Quesito C7 – Due progressioni

La successione $\{a_n\}$, con $n \in \mathrm{N}$, è una progressione aritmetica di ragione $k = 1.365$, mentre $\{b_n\}$ è una progressione geometrica di ragione $q = 2$, e sappiamo che hanno lo stesso valore iniziale $a_0 = b_0 = 4$. Per un (solo) $x > 0$ risulterà $a_x = b_x$.
Riproponiamo il problema, cambiando un dato: $k = 209.715$; e per un (solo) $y > 0$ risulterà $a_y = b_y$.
Quanto vale la somma $x + y$?

Quesito C8 – Travasi

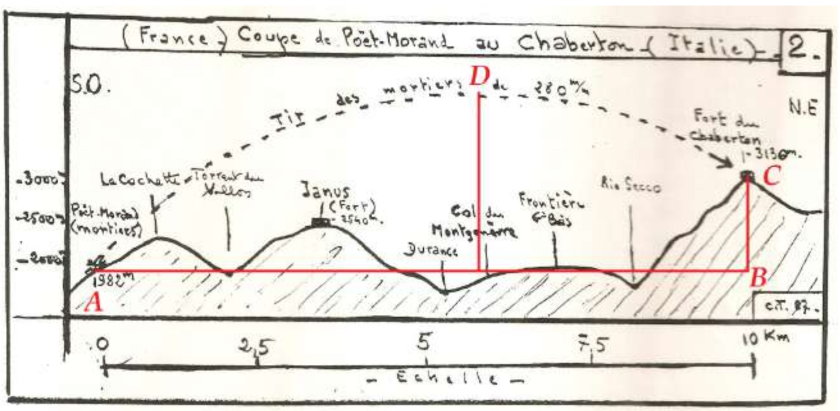
Si hanno due recipienti A e B. Inizialmente, A contiene 100 litri d'acqua, mentre B è vuoto. Si travasa la metà del contenuto di A in B, poi un terzo del contenuto di B in A, successivamente un quarto del contenuto di A in B, e così di seguito. In generale, si può dunque affermare che al travaso n-esimo, con n dispari, $1/(n + 1)$ del contenuto attuale di A passa in B, e al successivo travaso $1/(n + 2)$ del contenuto attuale di B passa in A.
Subito prima del 2.025-esimo travaso, il contenuto (in litri) del recipiente A sarà espresso da un numero razionale a / b, con a e b primi fra loro. **Calcolate questo numero e date come risposta la somma $a + b$.**

Quesito C9 – Una lunga sequenza di cifre

Maria ha iniziato a scrivere gli interi positivi l'uno dopo l'altro, in ordine crescente con l'intento di formare un'unica sequenza di cifre decimali: 12345678910111213…, e di fermarsi non appena apparirà una sequenza di quattro cifre consecutive diverse da 0 in ordine strettamente decrescente.
Quante cifre avrà scritto in tutto Maria quando si fermerà?

Quesito C10 – Distruggete lo Chaberton!

Il 21 giugno 1940, undici giorni dopo l'entrata dell'Italia nella Seconda guerra mondiale, i colpi di mortaio dell'artiglieria francese distrussero il forte (italiano) più alto d'Europa, sulla sommità del monte Chaberton, nelle Alpi Cozie, ritenuto "pressoché inespugnabile". Indubbiamente, i francesi ebbero una buona dose di fortuna, come si può evincere da questa cartina dell'epoca, sulla quale abbiamo aggiunto le indicazioni in rosso:



Supponiamo esatti i seguenti dati: i mortai (A) sono a 1.982 m s.l.m., il forte (C) è a 3.130 m s.l.m., il segmento orizzontale AB (perpendicolare a BC) è lungo 10.000 m, la massima quota raggiunta da un proiettile (D) è 4.727 m s.l.m.; trascurando l'attrito dell'aria, la rotazione del proiettile e la forza di Coriolis, e assumendo l'accelerazione di gravità $g = 9{,}81$ m/s^2, **vogliamo calcolare la velocità iniziale del proiettile, arrotondata al m/s.** (*In questo caso, l'arrotondamento sarà per eccesso.*)

Quesito C11 – Due soli fattori

Quanti sono i numeri interi n, compresi tra 3 e 10^6, ciascuno dei quali ha precisamente due distinti divisori, entrambi maggiori di 1 e minori di n, di cui uno primo e l'altro non primo?

Quesito C12 – Il ritorno del fantasma di mezzanotte

Lungo il corridoio di un antico maniero, immerso nel buio della notte, vi sono sette finestre. A mezzanotte precisa, un fantasma si affaccia a una di queste finestre (non so quale, ma so che il fantasma la sceglierà a caso, con uguale probabilità); dopo un minuto, si affaccia a una finestra adiacente, e così di seguito, minuto dopo minuto. Per meglio chiarire con un esempio, numerando le finestre da 1 a 7, da sinistra verso destra, se al minuto x il fantasma si affaccia alla finestra 2, al minuto $x + 1$ si affaccerà o alla finestra 1 o alla finestra 3, con uguale probabilità; ma se al minuto $x + 1$ si affaccia alla finestra 1, allora al minuto $x + 2$ dovrà affacciarsi nuovamente alla finestra 2.
Ad ogni minuto, stando all'esterno del maniero, io ho la facoltà di scegliere una finestra, a mio piacere, e di illuminarla, per vedere se, in quel momento, il fantasma è affacciato proprio lì. Ho trovato una sequenza di N numeri di finestre da illuminare che mi permette di individuare il fantasma in N tentativi al massimo.
Qual è il minimo intero N che verifica questa affermazione?

Quesito C13 – Nuovi incontri fra camaleonti

Ci sono 23 camaleonti verdi, 13 azzurri e 11 grigi. Gli incontri avvengono sempre tra due camaleonti. Quando due camaleonti di diverso colore si incontrano, entrambi assumono quel terzo colore che nessuno dei due ha.
Quanti incontri devono avvenire, come minimo, affinché tutti i camaleonti siano di uno stesso colore?

Soluzioni della prima selezione

13 marzo 2026

Soluzione del quesito A1

Risposta: 16. Infatti il trinomio è uguale a un numero primo per $x = 4$ o per $x = 12$; in entrambi i casi il trinomio è uguale a 7. Il trinomio si può infatti scomporre nel prodotto $(x – 5) \cdot (x – 11)$, per cui uno dei fattori deve essere o +1 o –1.
Se il primo fattore è +1 (per cui $x = 6$) oppure il secondo è –1 (per cui $x = 10$), allora il trinomio vale –5, che non è un numero primo. Se invece il primo fattore è –1 (per cui $x = 4$) oppure il secondo è +1 (per cui $x = 12$), allora il trinomio vale 7, che è un numero primo.

Soluzione del quesito A2

Risposta: 14. I tre prezzi sono 2, 5 e 7. Non possono essere tutti e tre dispari, poiché le tre differenze (di cui al più due uguali) sarebbero pari; quindi 2 è uno dei prezzi, e non può che essere il minore. Gli altri due prezzi, essendo dispari, corrispondono a due primi gemelli: la loro differenza, che è pari, deve essere 2. Dunque, sottraendo 2 (il minore dei tre prezzi) dal maggiore si ottiene il mediano e sottraendo 2 dal mediano si deve ottenere ancora un numero primo; l'unico numero che appartiene a due coppie di primi gemelli è 5, e queste coppie sono (3, 5) e (5, 7), da cui la soluzione.

Soluzione del quesito A3

Risposta: 333. $10^{37} – 1$ in notazione decimale è costituito da una sequenza di 37 cifre 9; la somma delle cifre non solo di questo numero, ma anche del suo quadrato è $9 \cdot 37$.
In generale, per $n = 1, 2, 3, \ldots$, il numero $10^n – 1$ si scrive con una sequenza di n cifre 9, e il suo quadrato è $(10^n – 1)^2 = 10^{2n} – 2 \cdot 10^n + 1 = 99 \ldots 9800 \ldots 01$, in cui entrambe le sotto-sequenze di 9 e di 0 hanno lunghezza $n – 1$.

Soluzione del quesito A4

Risposta: 9860. Tenendo presente che il 5% dei 132.000 euro iniziali non è stato investito, e quindi si suppone che sia rimasto inalterato, la somma oggi disponibile risulta:

$(0{,}35 \cdot 1{,}08 + 0{,}15 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}98 + 0{,}25 \cdot 1{,}009^{12} + 0{,}20 \cdot 0{,}96 \cdot 1{,}009^{8} + 0{,}05) \cdot 132.000$ euro $\approx 141.860{,}08$ euro.

Soluzione del quesito A5

Risposta: 1831. Basta osservare che, tracciando la retta n-esima, si dividono n delle regioni preesistenti, e quindi $r(n) = r(n-1) + n$ per ogni n intero maggiore di 1, sapendo che $r(1) = 2$. Si possono allora calcolare $r(2) = 2 + 2 = 4$, $r(3) = 4 + 3 = 7$, $r(4) = 7 + 4 = 11$, $r(5) = 11 + 5 = 16$ e così di seguito.
Si può anche risolvere la relazione di ricorrenza, giungendo alla forma chiusa $r(n) = n \cdot (n + 1) / 2 + 1$, valida per ogni n intero positivo, con la quale si determina subito

$$r(60) = 60 \cdot 61 / 2 + 1 = 1.831.$$

Soluzione del quesito A6

Risposta: 6737. Detti $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{10}, \ldots$ i termini di questa successione, si ha:

$$\begin{aligned}
t_4 &= (t_1 + t_2 + t_3) / 3 \\
t_5 &= (t_1 + t_2 + t_3 + (t_1 + t_2 + t_3) / 3) / 4 = \\
&\quad (t_1 + t_2 + t_3) \cdot (1 + 1 / 3) / 4 = (t_1 + t_2 + t_3) / 3 = t_4 \\
t_6 &= (t_1 + t_2 + t_3 + 2 \cdot (t_1 + t_2 + t_3) / 3) / 5 = \\
&\quad (t_1 + t_2 + t_3) \cdot (1 + 2 / 3) / 5 = (t_1 + t_2 + t_3) / 3 = t_5 = t_4
\end{aligned}$$

e così di seguito, per cui $t_{10} = (t_1 + t_2 + t_3) / 3$.
Dunque, $5.712 = (t_1 + 3.251 + 7.148) / 3$,
da cui $t_1 = 3 \cdot 5.712 - 3.251 - 7.148 = 6.737$.

Soluzione del quesito A7

Risposta: 4056. Indicando la lunghezza di un segmento con i suoi due estremi, si ha: $DE^2 = (2/3) \cdot DE \cdot AD/2$, da cui $AD/DE = 3$, e per similitudine $EF/FC = DE/FC = 3$, da cui $DE = 39$ cm e $AD = 117$ cm. Infine, $BC \cdot AD/2 = (39 + 13) \cdot (117 + 39)/2$ cm^2 = 4.056 cm^2.

Soluzione del quesito A8

Risposta: 105. Per ottenere il volume di una sfera basta moltiplicare la sua superficie per un terzo del raggio, il quale raggio è dato dalla radice quadrata del rapporto tra la superficie e 4π. Dunque, il volume della terza sfera è

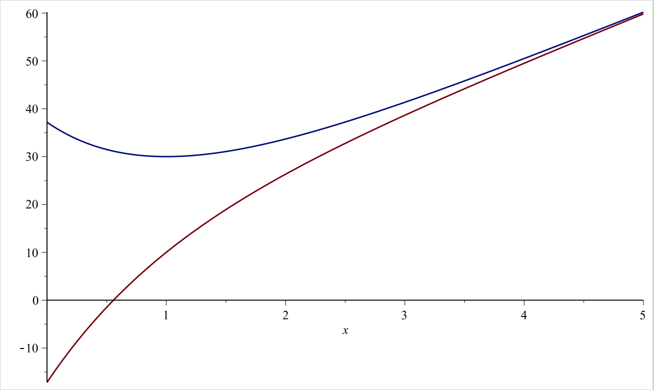
$$59 \cdot \sqrt{59/(4\pi)} \ / \ 3 \ + \ 73 \cdot \sqrt{73/(4\pi)} \ / \ 3 \ \approx \ 101{,}2626 \text{ cm}^3.$$

Per ricavarne il raggio, moltiplichiamo per 3, dividiamo per 4π ed estraiamo la radice cubica; il raggio della terza sfera è dunque lungo $\approx 2{,}89148$ cm. Infine, calcoliamo il quadrato di questo raggio e lo moltiplichiamo per 4π :

$$(2{,}89148 \text{ cm})^2 \cdot 4\pi \approx 105{,}063 \text{ cm}^2.$$

Soluzione del quesito A9

Risposta: 54. Per determinare la risposta ci si può avvalere della calcolatrice ***CASIO fx-CG50***. Tuttavia, volendo invece procedere per via analitica, si deve calcolare l'integrale da 0 a 5 della funzione differenza tra la seconda e la prima delle due funzioni date (il grafico della prima è quello inferiore nella figura della pagina a fianco).



La funzione differenza è semplicemente $20 \cdot e^{1-x}$, il cui integrale è $-20 \cdot e^{1-x}$ (a meno di una costante arbitraria); calcolato da 0 a 5, questo integrale risulta $20 \cdot (e - e^{-4}) \approx 53{,}9993 \approx 54$.
Notate che l'area compresa tra i due grafici, per x da 0 a $+\infty$, ha valore finito $20 \cdot e \approx 54{,}3656$.

Soluzione del quesito A10

Risposta: 4375. Una sequenza di quattro numeri che potrei aver trovato è 2, 3, 3, 2. Analizziamo i quattro casi equiprobabili:

1. a mezzanotte il fantasma si affaccia alla finestra 1; le possibili continuazioni, sino alla sua individuazione, sono due, equiprobabili:
   1, 2, 1, 2: fantasma individuato al quarto tentativo,
   1, 2, 3: fantasma individuato al terzo tentativo,
   quindi, in media, $4 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$ tentativi.

2. A mezzanotte il fantasma si affaccia alla finestra 2… ed è individuato al primo tentativo!

3. A mezzanotte il fantasma si affaccia alla finestra 3; le possibili continuazioni, sino alla sua individuazione, sono tre:

3, 2, 1, 2: fantasma individuato al quarto tentativo,
3, 2, 3: al terzo,
3, 4, 3: al terzo,
dove ciascuna delle prime due ha probabilità 0,25, mentre la terza ha probabilità 0,5, e pertanto, in media, i tentativi sono $4 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot (0{,}25 + 0{,}5) = 3{,}25$.

4. A mezzanotte il fantasma si affaccia alla finestra 4; la sola possibile continuazione è 4, 3, sicché il fantasma è individuato al secondo tentativo.

Il numero medio atteso di tentativi è dunque

$$(3{,}5 + 1 + 3{,}25 + 2)\ /\ 4 = 2{,}4375.$$

Vi è soltanto un'altra sequenza di quattro numeri che soddisfa il quesito: 3, 2, 2, 3, la cui analisi porta allo stesso risultato dianzi calcolato. Non è difficile convincersi del fatto che non vi sono sequenze più corte, ossia costituite da meno di quattro tentativi, che garantiscano di individuare il fantasma.

Soluzione del quesito A11

Risposta: **2495**. Poiché $1/(n \cdot (n + 2)) = (1/n - 1/(n + 2))\ /\ 2$ per ogni n positivo, l'espressione data si può riscrivere come

$$10000 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{996} - \frac{1}{998} + \frac{1}{998} - \frac{1}{1000}\right)/2$$

$$= 5000 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1000}\right) = 5 \cdot (500 - 1)$$

… *senza bisogno della calcolatrice!*

Soluzione del quesito A12

Risposta: **8960**. Dapprima calcoliamo in quanti modi collocare nelle quattro tasche le quattro monete da 2 euro. Immaginiamo di mettere in fila le quattro monete e di disporre tre separatori tra esse, per rappresentare la suddivisione tra le tasche; ad esempio,

O | O O | O |

significa che metteremo una moneta nella prima tasca, due nella seconda, una nella terza e nessuna nella quarta.
Calcoliamo pertanto le permutazioni con ripetizione di 7 oggetti, di cui 4 indistinguibili tra loro e 3 pure, che sono date da

$$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35.$$

Rimane da assegnare a ciascuna delle altre n (= 4) monete, tutte diverse tra loro (e diverse dalle precedenti), la tasca in cui metterla, tra le k (= 4) possibili: ciò si può fare in k^n (= 256) modi.
Pertanto la risposta al quesito è data dal prodotto

$$35 \cdot 256 = 8.960.$$

CONVEGNO NAZIONALE

MEET

MATEMATICA
INSEGNANTI
ESPERIENZA
ERRORE
TEMPO

Un'occasione di dialogo e di confronto tra chi INSEGNA, COMUNICA e STUDIA la matematica dalla scuola dell'infanzia all'università

il GIOCO

Fraterna Domus, via Sacrofanese 25, Sacrofano (ROMA)

Dal pomeriggio di **venerdì 4 settembre** (accoglienza ore 15:00/16:30)
al pranzo di **domenica 6 settembre 2026**

PERCHÉ MIT/MEET?

- È un convegno RESIDENZIALE che riconosce l'INCONTRO e il CONFRONTO come elementi fondamentali per sostenere la BELLISSIMA FATICA degli insegnanti di matematica, di sostegno e di altre discipline che desiderano dialogare con la matematica.
- È un convegno che mette al centro l'ESPERIENZA e l'ERRORE, che rendono viva e umana la matematica, dai primi passi del bambino alla ricerca di frontiera.
- Ogni edizione sarà dedicata a un desiderio umano fondamentale intrinseco alla matematica. La prima edizione ha come protagonista *il* GIOCO.

Tre giorni per pensare, sperimentare e giocare, condividendo la quotidianità, seminari, officine e momenti informali anche a tavola. Non cerchiamo modelli da replicare, ma esperienze da raccontare, interrogare e trasformare.

25 ORE di formazione docenti riconosciuta su piattaforma SOFIA (cod. corso 154524)

www.associazionetokalon.com/corso/mit-meet

realizzato da:

con il sostegno di:

con il patrocinio di:

Soluzioni della seconda selezione

9 aprile 2026

Soluzione del quesito B1

Risposta: **25**. Un numero con il requisito richiesto deve essere il quadrato di un numero primo, e i numeri primi minori di 100 sono appunto 25.

Soluzione del quesito B2

Risposta: **1023**. I fattori primi di 668.621 sono 61, 97 e 113; pertanto le terne (non ordinate) di valori possibili per a, b e c sono: (61, 97, 113) con somma 271, (1, 61·97, 113) con somma 6.031, (1, 61·113, 97) con somma 6.991 e (1, 61, 97·113) con somma 11.023, che è la maggiore.

Soluzione del quesito B3

Risposta: **316**. Infatti, per $x = 315$, la funzione data – che è strettamente crescente – vale esattamente 23, come è immediato verificare, poiché $\log_7 (315 + 28) = \log_7 (343) = 3$ e $4 \cdot 3 + 11 = 23$.

Soluzione del quesito B4

Risposta: **9**. Dato che ogni barattolo deve contenere la stessa quantità di colore di ogni altro, possiamo scrivere l'equazione

$$\frac{g}{8} + \frac{b}{10} = \frac{g+b}{n}$$

dove g e b sono le quantità totali di colore giallo e blu, rispettivamente, e n è il numero di barattoli che potremo riempire. Questa equazione può essere riscritta come

$$(n - 8) \cdot 10g = (10 - n) \cdot 8b$$

e quindi l'unico valore intero di n per cui i due membri hanno ugual segno (positivo) è 9.
Naturalmente, se alla fine non avanza colore, g è i 4/5 di b.
In alternativa, senza ledere la generalità e assumendo una certa unità di misura di volume (utilizzata anche per misurare la capacità dei barattoli), si può ipotizzare $g = 8$ e $b = 10$, sicché ciascun barattolo contiene 2 e quindi $n = (8 + 10) / 2 = 9$.

Soluzione del quesito B5

Risposta: **2520**. Le permutazioni sono 24, e le quattro cifre scelte vi compaiono 6 volte ciascuna sia nelle unità, sia nelle decine, sia nelle centinaia, sia nelle migliaia. Dunque la somma delle quattro cifre è data da 193.314 / 6.666 = 29, e pertanto le quattro cifre devono (necessariamente) essere 9, 8, 7 e 5.

Soluzione del quesito B6

Risposta: **8400**. Ponendo $m = 1$ nella definizione data, si ha $s(n + 1) = s(n) + 3 \cdot n + 1$ per ogni n intero positivo, e poiché $s(1) = 1$, si possono facilmente calcolare $s(2) = 1 + 3 + 1 = 5$, $s(3) = 5 + 3 \cdot 2 + 1 = 12$ e così di seguito.
Si può anche risolvere la relazione di ricorrenza, giungendo alla forma chiusa $s(n) = n \cdot (3n - 1) / 2$, valida per ogni n intero positivo, con la quale si determina subito

$$s(75) = 75 \cdot (3 \cdot 75 - 1) / 2 = 8.400.$$

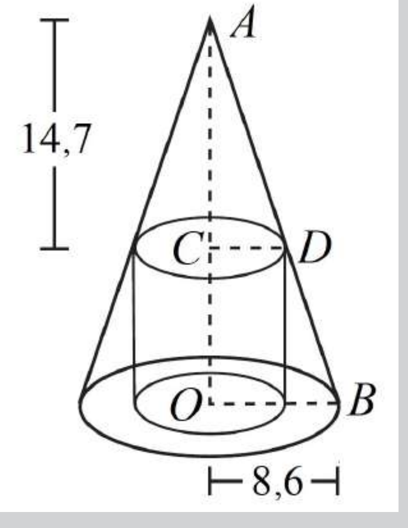
Si noti che la definizione data è buona: ad esempio, $s(1) + s(5) + 15 = s(2) + s(4) + 24 = 2 \cdot s(3) + 27 = 51$.

Soluzione del quesito B7

Risposta: 735. Poiché i triangoli *ABN* e *CMN* sono simili e *AB* ha lunghezza doppia di *CM*, anche *AN* ha lunghezza doppia rispetto a *CN*, e quindi *CN* e *NO* misurano rispettivamente un terzo e un sesto della diagonale *AC*.
Nel caso proposto, la diagonale del rettangolo misura $\sqrt{37^2 + 24^2} = \sqrt{1.945}$, di cui un sesto è circa 7,35 (metri).

Soluzione del quesito B8

Risposta: 1926. Con riferimento alla figura, se r è la lunghezza di *CD*, $2r$ è la lunghezza di *OC*.



Allora, per similitudine, si ha $14{,}7/r = (2r + 14{,}7)/8{,}6$, da cui $2r^2 + 14{,}7r - 14{,}7 \cdot 8{,}6 = 0$, la cui soluzione accettabile è $r \approx 5{,}08375$. Il volume del cono, espresso in cm^3, risulta quindi $\pi \cdot 8{,}6^2 \cdot (2r + 14{,}7)/3 \approx 1.926{,}006$.

Soluzione del quesito B9

Risposta: 6849. L'area della parte verde è $r^2 \cdot (4\pi - 3\sqrt{3})\ /\ 12$, e quindi l'area di ciascuna delle due parti bianche è

$$r^2 \cdot (2\pi + 3\sqrt{3})\ /\ 12.$$

Dunque, dall'area totale della vetrata (semicerchio di raggio $3r/2$) si deve sottrarre quella delle due parti bianche:

$$9\pi\, r^2/8 - r^2 \cdot (2\pi + 3\sqrt{3})\ /\ 12 = r^2 \cdot (19\pi - 12\sqrt{3})\ /\ 24.$$

Ponendo $r = 65$ cm,
quest'ultima espressione vale circa 6.849,02 cm^2.

Soluzione del quesito B10

Risposta: 7324. Per sapere quale numero è collocato nel posto di riga r, colonna c, basta sommare a r il numero triangolare $(r + c) \cdot (r + c + 1)/2$. Nel nostro caso, essendo $r + c = 120$, si ottiene $64 + 120 \cdot 121/2 = 7.324$.
Abbiamo applicato l'inversa di una funzione che *enumera* le coppie di naturali, e che (oltre ad essere totale, ossia definita per ogni naturale n) è anche bigettiva (quindi invertibile): dato il generico numero naturale n, tale funzione calcola il più piccolo numero triangolare $k \cdot (k + 1)/2$ che sia strettamente maggiore di n e restituisce la coppia formata dai numeri di riga $r = n - (k - 1) \cdot k/2$ e di colonna $c = k - 1 - r$.

Ricordate il Quesito A6 della prima selezione dello scorso anno?

Soluzione del quesito B11

Risposta: 429. *Rispetto al **Quesito B8** proposto nella **seconda selezione dello scorso anno**, qui si è aggiunto un vincolo: la diagonale a1–h8 non può essere oltrepassata*; comunque, anche nel presente caso, tutti i percorsi che conducono il Re a destinazione hanno lunghezza 12 – in generale, su una scacchiera $n \times n$, hanno lunghezza $2 \cdot (n - 1)$. Come mostrato lo scorso anno, le sequenze di lunghezza $2 \cdot (n - 1)$ con lo stesso numero di passi verso destra e di passi verso l'alto sono $comb(2 \cdot (n - 1), n - 1)$; ma, a causa del vincolo ora imposto, questo numero dovrà essere diviso per n:
dunque, $comb(2 \cdot (n - 1), n - 1) \;/\; n$, che nel caso $n = 8$ è

$$comb(14, 7) \;/\; 8 = 429.$$

Nota. $comb(n, k) = n! \;/\; (k!\,(n - k)!)$ è il numero di combinazioni di n elementi presi a gruppi di k.

*Poiché il numero di Catalan $C(n)$ è definito come $comb(2n, n) / (n + 1)$ per ogni $n \geq 0$, la risposta al nostro quesito è esprimibile come $C(n - 1)$. La successione di Catalan, dal nome del matematico belga Eugène Charles Catalan, può essere definita in diversi modi equivalenti, anche ricorsivamente come sommatoria dei prodotti $C(k) \cdot C(n - 1 - k)$ per $k = 0, \ldots, n - 1$, per ogni $n \geq 1$, avendo posto $C(0) = 1$, ed è utile in molti calcoli di natura combinatoria (cfr. **OEIS A000108**).*
Vediamo due modi per calcolarla facilmente. Numeriamo le righe del triangolo di Tartaglia a partire da 0 e consideriamo quelle di posto pari, che hanno un numero dispari di elementi. Prendiamo la successione degli elementi centrali di queste righe: 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, … e dividiamo questi numeri (che sono proprio $comb(2n, n)$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$) per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, … (ossia per $n + 1$).
Il secondo modo ripropone la scacchiera del quesito e comporta una sequenza di sole somme. Scriviamo 0 in ciascuna casa della diagonale a2–g8, che sta sopra alla grande diagonale a1–h8; poi scriviamo 1 in ciascuna casa della prima traversa, poiché è chiaro che il Re, parten-

do da a1, può fare un solo percorso (in orizzontale) per raggiungere ognuna di queste – e ha un solo modo di rimanere in a1: non muoversi! Poi, procedendo verso l'alto, riempiamo una traversa alla volta, da sinistra verso destra, scrivendo in ogni casa la somma dei due numeri che stanno rispettivamente a sinistra e sotto di essa: così facendo, il numero scritto in ognuna delle case è proprio il numero dei diversi percorsi che il Re può seguire per arrivare in quella casa, e sulla grande diagonale otteniamo i numeri di Catalan.

						0	429
					0	132	429
				0	42	132	297
			0	14	42	90	165
		0	5	14	28	48	75
	0	2	5	9	14	20	27
0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1

Soluzione del quesito B12

Risposta: 21. Mediante il foglio di calcolo o con un programma in Python, ad esempio:

```
def f(t, y):
    return -y - t

h = 0.1
t = 0.0
y = 10.0
for i in range(1, 23):
    k1 = f(t, y)
    y += h*(k1 + f(t + h, y + h*k1))/2
    t += h
    print(t, y)
```

si ottiene la sequenza:

0,1	9,045
0,2	8,171225
0,3	7,370958625
0,4	6,63721755562
0,5	5,96368188784
0,6	5,3446321085
0,7	4,77489205819
0,8	4,24977731266
0,9	3,76504846796
1,0	3,3168688635
1,1	2,90176632147
1,2	2,51659852093
1,3	2,15852166144
1,4	1,8249621036
1,5	1,51359070376
1,6	1,2222995869
1,7	0,949181126149
1,8	0,692508919165
1,9	0,450720571844
2,0	0,222402117519
2,1	0,00627391635448
2,2	-0,198822105699

Dunque, trascorsi poco più di 2 minuti dall'inizio della reazione, tutte e 10 le moli si sono combinate.
Il quesito è anche risolvibile mediante la funzione ***"Ricorsione"*** della calcolatrice **CASIO fx-CG50**.
Il metodo di integrazione numerica qui proposto è esplicito, a un passo, ed è conosciuto come metodo di Heun del secondo ordine (è un metodo di Runge-Kutta a 2 stadi).
La soluzione esatta dell'equazione differenziale data è la famiglia di funzioni

$$q(t) = c \cdot e^{-t} - t + 1$$

con c reale (*provatelo per esercizio*); dalla condizione iniziale $q(0) = 10$, si determina $c = 9$. Questa funzione (con $c = 9$) vale 0 per $t \approx 2{,}101$.

Soluzioni della finale nazionale

11 maggio 2026

Soluzione del quesito C1

Risposta: 528. 24 dadi, che stanno al centro delle sei facce del cubo, mostrano soltanto una faccia, e pertanto da questi possiamo ottenere $6 \cdot 24 = 144$. Altri 24 dadi, che stanno sugli spigoli ma non ai vertici, possono mostrare le facce 5 e 6, sicché contribuiscono con $11 \cdot 24 = 264$. Gli 8 dadi ai vertici mostrano tre facce, che possono essere 4, 5 e 6, e pertanto da essi otteniamo $15 \cdot 8 = 120$. I rimanenti 8 dadi sono nascosti all'interno del cubo, quindi non mostrano alcuna faccia.
In totale: $144 + 264 + 120 = 528$.

Soluzione del quesito C2

Risposta: 2856. Detto n un generico numero intero positivo, si ha $n = 100 \cdot q + r$. Considerando n da 10.000 a 99.999, q varia da 100 a 999, ognuno ripetuto 100 volte. Dividendo i numeri da 100 a 999 nelle loro classi di resto modulo 7, otteniamo 128 volte le classi 0, 1, 6, mentre 129 volte le classi 2, 3, 4, 5. Ora, per ognuno di questi quozienti, il resto r varia da 0 a 99. Ancora una volta, dividendo i numeri da 0 a 99 nelle loro classi di resto modulo 7, otteniamo 15 volte le classi 0, 1, mentre 14 volte le classi 2, 3, 4, 5, 6. Poiché la somma $q + r$ è divisibile per 7 se e solo se la somma delle classi di resto di q e r è divisibile per 7, abbiamo i seguenti casi:

- q ha classe 0 e r ha classe 0: $128 \cdot 15 = 1.920$ casi;
- q ha classe 1 e r ha classe 6: $128 \cdot 14 = 1.792$ casi;
- q ha classe 2 e r ha classe 5: $129 \cdot 14 = 1.806$ casi;
- q ha classe 3 e r ha classe 4: $129 \cdot 14 = 1.806$ casi;
- q ha classe 4 e r ha classe 3: $129 \cdot 14 = 1.806$ casi;
- q ha classe 5 e r ha classe 2: $129 \cdot 14 = 1.806$ casi;
- q ha classe 6 e r ha classe 1: $128 \cdot 15 = 1.920$ casi.

In totale, abbiamo quindi 12.856 numeri che soddisfano la proprietà richiesta. La risposta pertanto è 2.856.

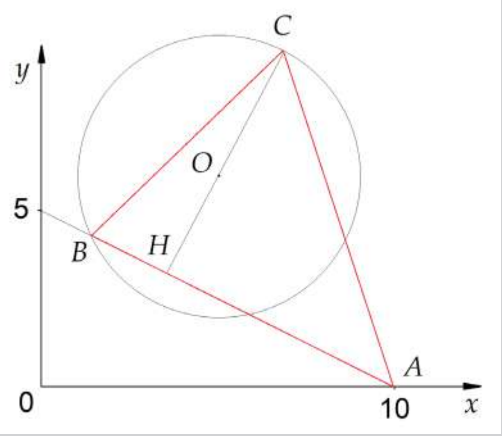
Volendo procedere in modo "empirico", si può scrivere ed eseguire un programma in Python:

```
c = 0
for n in range(10000, 100000):
    q = n // 100
    r = n % 100
    if (q + r) % 7 == 0:
        c += 1
print(c)
```

Soluzione del quesito C3

Risposta: 34. Scriviamo le equazioni della retta r e della circonferenza c e disegniamo la figura

r : $x / 10 + y / 5 - 1 = 0$ ossia $y = -x / 2 + 5$
c : $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 16$



La circonferenza c ha dunque centro O di coordinate (5, 6) e raggio 4; la distanza del centro O dalla retta r, ossia la lunghezza del segmento OH, è data da

$$\frac{\left|\frac{5}{10}+\frac{6}{5}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Le ascisse dei due punti di intersezione della retta r con la circonferenza c si trovano risolvendo l'equazione

$$x^2 + (5 - x/2)^2 - 10x - 12 \cdot (5 - x/2) + 45 = 0$$

le cui soluzioni risultano circa 1,3729 e 5,8271. Chiaramente, il vertice B che porta al triangolo ABC di area massima deve avere come ascissa ≈ 1,3729 e
quindi ordinata ≈ – 1,3729 / 2 + 5 = 4,31355,
mentre il vertice C sta sul prolungamento del segmento OH.

La base AB ha lunghezza $\approx \sqrt{(10 - 1{,}3729)^2 + 4{,}31355^2} \approx 9{,}6454$, l'altezza $CH = 4 + (7\sqrt{5}) / 5 \approx 7{,}1305$, per cui l'area richiesta, espressa in unità al quadrato, è circa 34,388.
In alternativa, si potevano ricavare le espressioni precise delle coordinate del punto B, la cui ascissa è $(18 - 2\sqrt{31}) / 5$ *e l'ordinata* $(16 + \sqrt{31}) / 5$*; quindi, più semplicemente, la lunghezza di AB risulta* $(16 + \sqrt{31}) / \sqrt{5}$.

Soluzione del quesito C4

Risposta: 2138. Sia 2.137 sia 1.069 sono numeri primi. Il risultato, necessariamente pari (e non multiplo di 10), può essere ottenuto eseguendo questo programma in Python:

```
def primo(n):
    # restituisce True se n primo, False altrimenti
    f = 2
    while n % f != 0:
        f += 1
    return f == n

a = 2022
while True:
    if primo(a-1) and primo(a//2):
        print(a)
        break
    a += 2
```

Questo è un procedimento di forza bruta, che considera tutti i numeri pari a partire da 2022, sino a trovarne uno che abbia le proprietà richieste: è tuttavia migliorabile a seguito di un paio di considerazioni, grazie alle quali si può giungere anche a una soluzione con carta e matita.

Indicato con n il numero da trovare, siano p e q due numeri primi tali che $n = p + 1 = 2q$, da cui $p = 2q - 1$. Chiaramente p e q sono entrambi dispari, ossia congrui a 1 (modulo 2), ma entrambi non multipli di 3, ossia non congrui a 0 (modulo 3). In particolare, quindi, q è congruo o a 1 o a 2 (modulo 3); ma nel secondo caso si avrebbe $p = 2q - 1 \equiv 2 \cdot 2 - 1 \equiv 3 \equiv 0$ (modulo 3), e dunque q deve essere congruo a 1 (modulo 3), oltre che congruo a 1 (modulo 2), sicché $q \equiv 1$ (modulo 6).

Notiamo che, in effetti, $1.009 \equiv 1$ (modulo 6), e dovremo quindi determinare il minimo intero positivo k tale che $q = 1.009 + 6 \cdot k$ e $p = 2.017 + 12 \cdot k$ siano entrambi primi: vi invitiamo a modificare di conseguenza il programma scritto sopra. Volendo analizzare più a fondo il problema, per escludere alcuni valori di k, si può ragionare sui resti delle divisioni per i numeri primi successivi a 3:

- **modulo 5:**

$q \not\equiv 0 \rightarrow 1.009 + 6 \cdot k \equiv -1 + k \not\equiv 0 \rightarrow k \not\equiv 1$;
$p \not\equiv 0 \rightarrow 2.017 + 12 \cdot k \equiv -3 + 2 \cdot k \not\equiv 0 \rightarrow$
(moltiplicando per 3) $-9 + 6 \cdot k \equiv -4 + k \not\equiv 0 \rightarrow k \not\equiv 4$

- **modulo 7:**

$q \not\equiv 0 \rightarrow 1.009 + 6 \cdot k \equiv 1 + k \not\equiv 0 \rightarrow k \not\equiv 1$

- **modulo 11:**

$p \not\equiv 0 \rightarrow 2.017 + 12 \cdot k \equiv -7 + k \not\equiv 0 \rightarrow k \not\equiv 7$

- **modulo 13:**

$p \not\equiv 0 \rightarrow 2.017 + 12 \cdot k \equiv 2 - k \not\equiv 0 \rightarrow k \not\equiv 2$.

Sulla base di queste condizioni, rimangono da considerare per k i valori 3, 5, 10, 12, 13, …

Per $k = 3$, si ha $q = 1.027$ e $p = 2.053$, ma 1.027 è divisibile per 13.
Per $k = 5$, si ha $q = 1.039$ e $p = 2.077$, ma 2.077 è divisibile per 31.
Finalmente, per $k = 10$, si ha $q = 1.069$ e $p = 2.137$, che sono entrambi primi, e dunque $n = p + 1 = 2.138$.

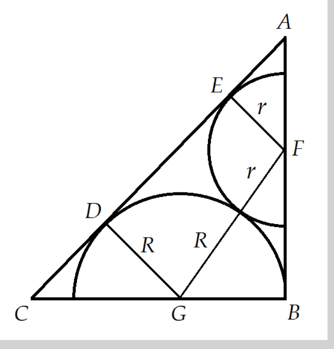
Soluzione del quesito C5

Risposta: 51. Con riferimento alla figura sotto riportata, indicando le lunghezze dei segmenti con le lettere associate ai loro estremi e detti R il raggio noto e r il raggio incognito, si ha:

$BC = BG + CG = R + R \cdot \sqrt{2} = R \cdot (1 + \sqrt{2})$

$ED = AC - AE - CD = BC \cdot \sqrt{2} - r - R = R \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot R - r - R = R \cdot (1 + \sqrt{2}) - r$

$FG^2 - (DG - EF)^2 = ED^2$ ovvero
$(R + r)^2 - (R - r)^2 = (R \cdot (1 + \sqrt{2}) - r)^2$



Quest'ultima è un'equazione di secondo grado in r

$$r^2 - 2 \cdot R \cdot (3 + \sqrt{2}) \cdot r + R^2 \cdot (1 + \sqrt{2})^2 = 0$$

la cui unica soluzione accettabile è

$$r = R \cdot (3 + \sqrt{2}) - \sqrt{R^2 \cdot (3 + \sqrt{2})^2 - R^2 \cdot (1 + \sqrt{2})^2} = R \cdot (3 + \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}).$$

(Chiaramente, l'altra soluzione non è accettabile in quanto porterebbe ad avere $r \approx R \cdot 8{,}1$.)
Si ricava quindi $r \approx 71 \cdot 0{,}7187$ cm $\approx 51{,}03$ cm.

UN'AULA SENZA PARETI
PROGETTI DIDATTICI

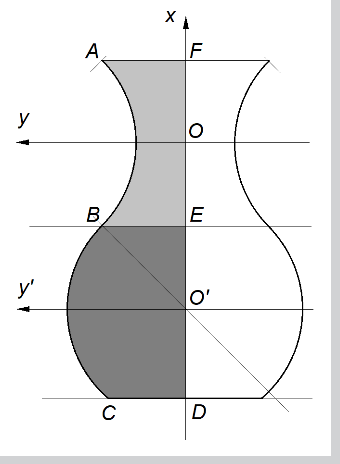
DOVE IL DIVERTIMENTO INCONTRA L'APPRENDIMENTO!

Mirabilandia, il Parco Divertimenti più grande d'Italia, diventa **il laboratorio ideale per ogni scuola**! Unisciti a noi per **un'esperienza educativa unica e coinvolgente**, che unisce il divertimento alla scoperta di scienze, fisica, matematica e tanto altro.

Scopri i nostri Progetti Didattici!
Ogni attività è progettata per **stimolare la curiosità** degli studenti, guidandoli nella scoperta della scienza dietro le attrazioni del Parco. **I tutor**, professionisti appositamente formati, accompagneranno le classi in percorsi didattici esclusivi, **da aprile a giugno**.

Soluzione del quesito C6

Risposta: 1695. La prima parte del calcolo riguarda la rotazione della superficie grigia chiara, la seconda di quella scura.



Anzitutto notiamo che $AF = FO = OE = EB = EO' = (7\sqrt{2})/2$. Assumendo il riferimento cartesiano xOy, l'arco AB è parte della semicirconferenza convessa di centro $(0, 7\sqrt{2})$ e raggio 7, che ha equazione

$$y = 7\sqrt{2} - \sqrt{7^2 - x^2}$$

Il solido di rotazione della superficie grigia chiara ha quindi volume

$$\pi \int_{-7\frac{\sqrt{2}}{2}}^{7\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(7\sqrt{2} - \sqrt{7^2 - x^2}\right)^2 dx$$

pari a circa 400,0825 centimetri cubi.

Nota: *volendo risolvere analiticamente questo integrale, si tenga presente che, mediante la sostituzione $x = a \cdot sin(t)$, da cui $t = arcsin(x/a)$ con t nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, a meno di costanti additive si ha:*

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a^2 cos^2(t)dt = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}sin(2t)\right) =$$

$$a^2\left(\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{4}sin\left(2arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right)$$

Si può anche ricavare (con quale procedimento?):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}arctang\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$$

Nel presente caso, $a = 7$.

Assumendo il riferimento cartesiano $xO'y'$, l'arco BC è parte (superiore a un quarto) della semicirconferenza concava di centro (0, 0) e raggio 7, che ha equazione

$$y = \sqrt{7^2 - x^2}$$

Il solido di rotazione della superficie grigia scura ha quindi volume

$$\pi \int_{-5,3}^{7\frac{\sqrt{2}}{2}} (7^2 - x^2)dx$$

pari a circa 1.294,9300 centimetri cubi. Ovviamente a questo stesso risultato si perviene anche sottraendo dal volume della sfera di raggio 7 quello dei due segmenti sferici di altezze $7 - (7\sqrt{2})/2$ e $7 - 5,3$.
La somma dei due volumi calcolati dà 1.695,0125 cm^3.

I due integrali definiti che permettono di risolvere il quesito, come sopra delineato, possono essere calcolati numericamente, con la precisione richiesta, usando la calcolatrice grafica ***CASIO fx-CG50****.*

Soluzione del quesito C7

Risposta: 32. Per ogni $n \in N$, si ha: $a_n = a_0 + k \cdot n$ e $b_n = b_0 \cdot q^n$. Con i dati iniziali, imponendo $a_x = b_x$ si ottiene:

$$4 + 1.365 \cdot x = 4 \cdot 2^x, \text{ da cui } 1.365 \cdot x = 4 \cdot (2^x - 1),$$

equazione che ammette, oltre alla soluzione ovvia $x = 0$, la sola altra soluzione $x = 12$, che può essere trovata con la calcolatrice ***CASIO fx-CG50***, ad esempio dall'intersezione delle due funzioni $341{,}25 \cdot x + 1$ e 2^x.
Cambiando il valore di k, come richiesto, e imponendo $a_y = b_y$ si ottiene:

$$4 + 209.715 \cdot y = 4 \cdot 2^y, \text{ da cui } 209.715 \cdot y = 4 \cdot (2^y - 1),$$

equazione che ammette, oltre alla soluzione ovvia $y = 0$, la sola altra soluzione $y = 20$ (anche questa si trova con la calcolatrice, pur di ridurre l'intervallo tra i limiti inferiore e superiore, lower e upper). Quindi $x + y = 32$.

Come si potrebbe ragionare, in generale, non disponendo di una calcolatrice come **CASIO fx-CG50**? *Deve essere*

$$4 + k \cdot n = 4 \cdot 2^n, \quad \text{con } n = x \text{ se } k = 1.365, \text{ o } n = y \text{ se } k = 209.715.$$

Dunque, in ogni caso, $k \cdot n$ deve essere un multiplo di 4, ma k è dispari, sicché n deve essere multiplo di 4. Ponendo $n = 4m$, si ha $4 + k \cdot 4m = 4 \cdot 2^{4m}$ ossia, dividendo per 4, $1 + k \cdot m = 16^m$. Quindi $1 + k \cdot m$ deve essere multiplo di 16 ovvero, dividendo $k \cdot m$ per 16, si deve avere resto 15. Esaminando ora i due casi:

- *se $k = 1.365$ (che diviso 16 dà resto 5) allora m sarà della forma $3 + 16 \cdot h$, quindi $1 + 1.365 \cdot (3 + 16 \cdot h) = 16^3 \cdot (16^{16})^h$. Non può che essere $h = 0$ (visto il valore 16^{16}), per cui $m = 3$ e $n = x = 12$.*
- *se $k = 209.715$ (che diviso 16 dà resto 3) allora m sarà della forma $5 + 16 \cdot h$, quindi $1 + 209.715 \cdot (5 + 16 \cdot h) = 16^5 \cdot (16^{16})^h$, e anche in questo caso sarà $h = 0$, per cui $m = 5$ e $n = y = 20$.*

Soluzione del quesito C8

Risposta: 4133. Supponiamo che, subito dopo il travaso n-esimo, con n positivo dispari, i due recipienti abbiano uguale contenuto q. (È immediato notare che ciò accade già quando $n = 1$, ovvero subito dopo il primo travaso: entrambi i recipienti contengono 50 litri d'acqua.) Allora, al travaso $(n + 1)$-esimo, $1/(n + 2)$ del contenuto attuale di B passa in A, sicché possiamo scrivere:

$$A = q + q/(n + 2) = q \cdot (n + 3)/(n + 2),$$
$$B = q - q/(n + 2) = q \cdot (n + 1)/(n + 2)$$

E dopo il successivo travaso avremo:

$$A = (q \cdot (n + 3)/(n + 2)) \cdot (1 - 1/(n + 3)) = q,$$
$$B = q \cdot (n + 1)/(n + 2) + q \cdot (n + 3)/(n + 2)/(n + 3) = q$$

ovvero, dopo due travasi, entrambi i recipienti hanno di nuovo contenuto q. Ma allora dopo il terzo travaso, così come dopo il quinto, dopo il settimo… dopo il 2.023-esimo, i due recipienti conterranno 50 litri d'acqua!
Al 2.024-esimo travaso, 1/2.025 del contenuto attuale di B (50 litri) passa in A, sicché in A vi saranno $50 \cdot (1 + 1/2.025)$ litri d'acqua; $50 \cdot (1 + 1/2.025) = 50 \cdot 2.026/2.025 = 20.260/405 = 4.052/81$ e $4.052 + 81 = 4.133$.

Soluzione del quesito C9

Risposta: 4622. Maria si fermerà dopo aver scritto …14311**4321** (l'ultima cifra scritta è la prima di 1.433). Quindi, in tutto, avrà scritto $1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + (1.432 - 999) \cdot 4 + 1 = 4.622$ cifre.

Soluzione del quesito C10

Risposta: 334. Assumiamo un riferimento cartesiano monometrico, con unità il metro, origine in A e segmento AB sull'asse delle ascisse; dai dati del problema, sappiamo che la traiettoria ideale, parabolica, parte dall'origine, l'ordinata del vertice D è 4.727 – 1.982 = 2.745 (ma non conosciamo la sua ascissa) e arriva al punto C di coordinate (10.000, 3.130 – 1.982) = (10.000, 1.148). Questi dati sono comunque sufficienti per determinare in modo univoco l'equazione della parabola:

$y = ax^2 + bx$ con $a \approx -0{,}0000852948850744456\ (\mathrm{m}^{-1})$ e $b \approx 0{,}967748850744558$.

La derivata in $x = 0$ vale b, e quindi l'angolo di lancio α (rispetto all'asse delle ascisse) è l'arcotangente di b, circa 0,769 radianti (ovvero circa 44°).
Ricordando le equazioni del moto, la velocità iniziale è data dalla radice quadrata di $-g\ /\ (2a \cdot \cos^2\alpha)$, sicché risulta circa 333,711371 m/s: paragonabile, dunque, alla velocità del suono nell'aria.

Vediamo anche una soluzione alternativa. Indicate con v_{0x} e v_{0y} le componenti della velocità iniziale del proiettile lungo gli assi x e y, scriviamo anzitutto le equazioni del moto:

$$v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - g \cdot t^2/2$$
$$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

dove $x_0 = y_0 = 0$ per costruzione degli assi.
Sia t_D il tempo impiegato dal proiettile per andare da A al punto di altezza massima D. Si ha $v_y(t_D) = 0$, per cui $v_{0y} = g \cdot t_D$ ovvero $t_D = v_{0y} / g$. Allora $y(t_D) = v_{0y}^{\,2} / (2g) = 2.745$ m, da cui $v_{0y} = \sqrt{(2g \cdot 2745\ \mathrm{m})} \approx 232{,}07$ m/s e $t_D \approx 23{,}7$ s.
Sia t_C il tempo impiegato dal proiettile per andare da A a C; allora $y(t_C) = v_{0y} \cdot t_C - g \cdot t_C^{\,2}/2 = 1.148$ m, da cui $g \cdot t_C^{\,2} - 2v_{0y} \cdot t_C + 2 \cdot 1.148\ \mathrm{m} = 0$.

Risolvendo questa equazione con **la calcolatrice CASIO fx-CG50**, *otteniamo i due tempi (approssimati) 5,6 s e 41,7 s, il primo dei quali non è accettabile in quanto minore di t_D.*
Dunque $v_{0x} = x(t_C) / t_C \approx 10.000 / 41{,}7$ (m/s) $\approx 239{,}8$ m/s, e infine $v_0 = \sqrt{(v_{0x}^2 + v_{0y}^2)} \approx 333{,}71$ m/s.

Sulla tragica vicenda qui ricordata è stato pubblicato un bel libro, riccamente documentato, scritto dal colonnello d'artiglieria Edoardo Castellano: Distruggete lo Chaberton! (Edizioni Il Capitello, Torino 1984).

Soluzione del quesito C11

Risposta: **25**. I numeri con i requisiti richiesti sono precisamente i cubi dei numeri primi minori di 100 (100, che non è primo, è la radice cubica di un milione). Ricordiamo che ogni intero $n > 1$ ha un'unica scomposizione in fattori primi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (distinti) con esponenti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (interi positivi) rispettivamente; il numero di divisori di n, compresi 1 e n stesso, è dato da $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1)$, e tali divisori si ottengono come prodotti di $p_1, p_2, \ldots, p_k$ con esponenti $b_1, b_2, \ldots, b_k$ rispettivamente, per $b_i = 0, 1, \ldots, a_i$ per ogni i da 1 a k.
Poiché nel nostro caso il numero totale di divisori (compresi 1 e n) deve essere 4, ci sono soltanto due possibilità:

- $k = 2$ e $a_1 = a_2 = 1$, ovvero $n = p_1 \cdot p_2$: non accettabile, poiché, esclusi 1 e n, i divisori sarebbero i due numeri primi p_1 e p_2;
- $k = 1$ e $a_1 = 3$, ovvero $n = p_1^3$, il cubo di un numero primo, i cui divisori, esclusi 1 e n, sono p_1 e p_1^2 (che non è primo).

D'altra parte, i numeri primi minori di 100 sono 25 (il primo è 2, l'ultimo 97), e si possono contare mediante un programma in Python:

```
def primo(n):  # precondizione: n >= 2;
            # restituisce 1 se n primo, 0 altrimenti
    f = 2
    while n % f != 0:
        f += 1
    if f == n: return 1
    else: return 0

c = 0
for n in range(2, 100):
    if primo(n): c += 1
print(c)
```

Ovviamente, mancando l'analisi "con carta e matita" fatta sopra, avremmo potuto scrivere un programma di forza bruta:

```
c = 0
for n in range(3, 1000001):
  divisori = 0
  for d in range(2, n):
      if n % d == 0:
         divisori += 1
         if divisori == 1: p1 = primo(d)
         elif divisori == 2: p2 = primo(d)
         elif divisori > 2: break
      if divisori == 2 and (p1 ^ p2):
           # in Python, a ^ b == a XOR b
           c += 1
print(c)
```

la cui esecuzione avrebbe fornito – ma dopo una lunghissima attesa! – il medesimo risultato, 25.

Soluzione del quesito C12

Risposta: 10. Una sequenza di dieci numeri che potrei aver trovato è 2, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 2. Le possibili apparizioni del fantasma, sino alla sua individuazione, sono ben 242 (e pertanto evitiamo di elencarle): la più breve ha lunghezza 1 (qualora, a mezzanotte, il fantasma decida di affacciarsi alla finestra 2), le più lunghe sono 68 e prevedono appunto che il fantasma sia individuato al decimo e ultimo tentativo (una di queste, ad esempio, è: 7, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2).
Vi sono altre tre sequenze di dieci numeri che soddisfano il quesito:

6, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 6; 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4, 5, 6;
6, 5, 4, 3, 2, 6, 5, 4, 3, 2;

con esiti analoghi. Non è difficile convincersi del fatto che non vi sono sequenze più corte, ossia costituite da meno di dieci tentativi, che garantiscano di individuare il fantasma.
In generale, se le finestre del corridoio sono n, con $n > 2$, la lunghezza minima delle sequenze certamente risolutive è $2 \cdot (n - 2)$. Numeriamo le finestre da 1 a n, da sinistra a destra oppure viceversa.
Se $n = 3$, vi è soltanto una sequenza certamente risolutiva: 2, 2.
Se n è pari (≥ 4), le sequenze certamente risolutive sono due:

$$2, \ldots, n-1, n-1, \ldots, 2; \qquad n-1, \ldots, 2, 2, \ldots, n-1.$$

Se n è dispari (≥ 5), alle due precedenti se ne aggiungono altre due:

$$2, \ldots, n-1, 2, \ldots, n-1; \qquad n-1, \ldots, 2, n-1, \ldots, 2,$$

e pertanto le sequenze certamente risolutive sono quattro.
*Riguardate il quesito **A10** della prima selezione di quest'anno!*

Una dimostrazione formale dell'ottimalità della strategia descritta richiede alcune definizioni e molto spazio; ne proponiamo una versione con qualche passaggio non esplicitato, ma più o meno completa.

Indichiamo con $S = \{1, 2, \dots, n\}$ l'insieme delle n finestre, supponendo $n \geq 3$; chiaramente, se fosse $n = 2$, il fantasma sarebbe individuato al più in due tentativi, scegliendo due volte una stessa finestra.
Sia $S_x \subseteq S$ l'insieme delle finestre a cui il fantasma potrebbe affacciarsi al minuto x ($x = 1$ a mezzanotte) e sia $a_x \in S$ la finestra da noi illuminata al minuto x, secondo la strategia di illuminazione che abbiamo fissato.
Allora $S_{x+1} = \{s \in S \mid s+1 \in S_x - \{a_x\} \vee s-1 \in S_x - \{a_x\}\}$ per definizione.
Siano:
$P_1 = \{s \in S \mid s \text{ pari}\}$, $P_{x+1} = \{s \in P_x \mid s+1 \in P_x - \{a_x\} \vee s-1 \in P_x - \{a_x\}\}$,
e analogamente:
$D_1 = \{s \in S \mid s \text{ dispari}\}$, $D_{x+1} = \{s \in D_x \mid s+1 \in D_x - \{a_x\} \vee s-1 \in D_x - \{a_x\}\}$.
Consideriamo la strategia costituita da $2n - 4$ illuminazioni a_x definite da:
$a_x = x + 1$, per $x = 1, \dots, n - 2$;
$a_x = 2n - 2 - x$, per $x = n - 1, \dots, 2n - 4$.
Allora, per $x = 1, \dots, n - 2$, $P_x = \{s \in \{x + 1, \dots, n\} \mid s + x \text{ dispari}\}$ e quindi $P_{n-2} = \{n - 1\}$. Ma allora $P_{n-1} = \varnothing$, da cui $P_x = \varnothing$ per ogni $x \geq n - 1$.
Poiché, per ogni $x = 1, \dots, n - 2$, $a_x \in P_x$ e $P_x \cap D_x = \varnothing$, si ha $D_{n-1} = \{s \in S \mid s + n \text{ dispari}\}$.
In particolare, $a_{n-1} \in D_{n-1}$ e, di conseguenza, $a_x \in D_x$ per ogni $x = n - 1, \dots, 2n - 4$.
In effetti, $D_x = \{s \in \{1, \dots, 2n - 2 - x\} \mid s + x \text{ pari}\}$ per ogni $x = n - 1, \dots, 2n - 4$, da cui $D_{2n-4} = \{2\}$. Quindi $D_{2n-3} = \varnothing$.
Ora, siccome S_x è uguale all'unione disgiunta di P_x e D_x e inoltre, con $2n - 4$ illuminazioni, S_{2n-3} (uguale dunque all'unione disgiunta di P_{2n-3} e D_{2n-3}) $= \varnothing$, la strategia descritta è sufficiente e vincente.
Per simmetria, sono vincenti anche le seguenti strategie:
$n - 1, \dots, 2, 2, \dots, n - 1$ per ogni $n \geq 3$;
$2, \dots, n - 1, 2, \dots, n - 1$; $n - 1, \dots, 2, n - 1, \dots, 2$ se n (≥ 3) è dispari.
Si può infine dimostrare che tali strategie sono anche "minime"…

Soluzione del quesito C13

Risposta: 23. Supponiamo di partire dalla generica terna di interi positivi (v, a, g), che sono i numeri di camaleonti verdi, azzurri e grigi, rispettivamente. Vogliamo ricavare, in funzione di questa terna, il minimo numero di incontri che devono avvenire affinché tutti i camaleonti abbiano uno stesso colore. Un "incontro" tra due camaleonti di diverso colore può essere visto come un'operazione che trasforma tale terna; quindi, i tre possibili "incontri" definiscono altrettante operazioni di seguito elencate:

1. $G((v, a, g)) = (v - 1, a - 1, g + 2)$
2. $A((v, a, g)) = (v - 1, a + 2, g - 1)$
3. $V((v, a, g)) = (v + 2, a - 1, g - 1)$.

Notiamo che, a prescindere dall'operazione considerata, due componenti della terna appartengono alla stessa classe di congruenza modulo 3 se e soltanto se le medesime componenti dopo l'applicazione dell'operazione appartengono alla stessa classe di congruenza modulo 3 (in effetti, è costante la classe di congruenza modulo 3 della differenza di due componenti). Pertanto, se nella terna finale due componenti devono essere 0, è necessario che nella terna iniziale vi siano almeno due componenti nella stessa classe di congruenza modulo 3. Dimostreremo costruttivamente che questa condizione è anche sufficiente.
Senza perdita di generalità, possiamo assumere

$$a \equiv g \pmod 3 \ \wedge \ a > g \ \wedge \ (v > a \ \vee \ v \not\equiv a \pmod 3).$$

Vogliamo dimostrare che, in questa ipotesi, sono sufficienti a incontri per ottenere una situazione in cui tutti i camaleonti siano dello stesso colore.
Osserviamo che questo è sicuramente anche il numero minimo di incontri. Infatti, ad ogni incontro, le componenti dimi-

nuiscono al più di una unità, e dunque, se il numero di camaleonti azzurri deve scendere a 0, servono almeno a incontri. D'altra parte, se il numero di camaleonti azzurri non scendesse a 0, ma scendesse a 0 il numero dei verdi o dei grigi, allora, per quanto già detto, $v \equiv g \equiv a \pmod 3$ e quindi $v > a$; pertanto servirebbero almeno v incontri, più di a.
Dimostriamo ora che sono sufficienti a incontri per arrivare ad avere tutti i camaleonti verdi. Sia $(v_0, a_0, g_0) = (v, a, g)$ la tripla di partenza. Se applichiamo g volte l'operazione V, otteniamo la terna $(v_1, a_1, 0)$, dove $v_1 = v_0 + 2g$ e $a_1 = a_0 - g$.
Siccome $a \equiv g \pmod 3$, risulta $a_1 \equiv 0 \pmod 3$, ovvero esiste un naturale m tale che $a_1 = 3m$.
Consideriamo ora la composizione $V{\circ}V{\circ}G$: applicandola alla generica terna (v, a, g), otteniamo la terna $(v + 3, a - 3, g)$; pertanto, se partiamo dalla terna $(v_1, a_1, 0)$ e applichiamo m volte questa composizione, giungiamo alla terna $(v_2, 0, 0)$, dove $v_2 = v_1 + 3m = v_0 + 2g + a_1 = v + 2g + a - g = v + a + g$.
Il numero totale di incontri è dunque

$$g + 3m = g + a_1 = g + a - g = a.$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che:

- il problema è risolvibile se e soltanto se almeno due dei tre numeri della terna iniziale sono congruenti modulo 3;
- indicando con a, b e c i tre numeri della terna iniziale (non importa in quale ordine), se si verifica che $b \equiv c \pmod 3$, con $b > c$, e inoltre si verifica che $a > b$ oppure $a \not\equiv b \pmod 3$, allora il numero minimo di incontri affinché tutti i camaleonti siano dello stesso colore è b.

Riguardate il quesito C8 della finale dello scorso anno!

Note

Note

Finito di stampare
nel mese di aprile 2026
per conto di
Associazione Culturale Kangourou Italia
presso ***Arti Grafiche Bianca & Volta***
via del Santuario 2
Truccazzano (MI)
ISBN: 979 - 12 - 81294 - 07 - 3

Kangourou Italia opera con il patrocinio

- *dell'Istituto Internazionale Edoardo Agnelli*
- *della Federazione Italiana Mathesis*
- *del Comune di Cesenatico*
- *del Comune di Cervia*

Edizioni Kangourou
Italia