Una parabola e un’ellisse molto “vicine” tra loro

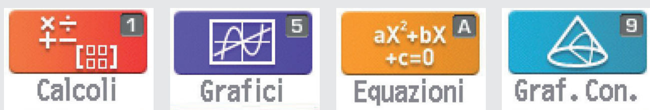
di **Andrea Tartari** | IIS “C. VARANO” - Camerino (MC)

Il problema proposto prende spunto da una situazione fisica di un corpo che si muove lungo una traiettoria ellittica e, vista la sua articolazione, consente di effettuare un ripasso generale delle coniche, in quanto coinvolge anche la circonferenza e la parabola. Nei primi tre punti, per quanto i calcoli non siano immediati, si fanno richieste tradizionali. L’ultimo punto invece, ideato dal sottoscritto, fa riflettere lo studente sul concetto di tangenza tra due curve in una situazione grafica un po’ particolare in cui le due curve sembrano quasi sovrapporsi nell’intervallo delimitato dai loro punti di intersezione.

Intro

Area tematica	Geometria Relazioni e funzioni	**Area Collocazione**	Secondaria secondo grado - Secondo biennio
Prerequisiti		Parabola, circonferenza, ellisse, posizione reciproca tra retta e conica. Traslazioni nel piano. Condizione di tangenza tra due curve.	
Obiettivi di apprendimento disciplinari e multidisciplinari		L’obiettivo principale è quello di far riflettere sul significato geometrico di tangenza fra due curve e acquisire una maggiore consapevolezza a riguardo. L’esperienza infatti è pensata per una classe di triennio del liceo scientifico, ma che ancora non ha affrontato lo studio dei limiti e delle derivate, che aiutano a fissare il concetto di tangenza. Averlo ben chiaro, almeno da un punto di vista geometrico, anche ricordando lo studio dei fasci di coniche, è senz’altro utile per affrontare argomenti successivi.	
Tempo previsto per l’attività		3 ore	

Risorse

Strumentazione utilizzata nel corso dell’attività (hardware e software)	Calcolatrice grafica FX-CG 50
Menù utilizzati	
Materiali / attrezzature utilizzate	E- Book

Descrizione

Descrizione sintetica svolgimento	La traiettoria di un punto materiale, rappresentata in un riferimento cartesiano in cui le unità di misura sono espresse in metri, è un'ellisse α con centro in O e fuoco $F_1\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3},0\right)$, passante per P(3;2.) a) Determina l'equazione della traiettoria α. b) Trova le equazioni della retta t tangente ad α nel punto P e della retta n passante per P e perpendicolare a t. c) Determina l'equazione della circonferenza γ di centro $C\left(\frac{9}{4},0\right)$e passante per P .Verifica che γ è tangente ad α in P. d) Sia Γ la parabola che interseca l'asse x nei punti di ascissa 0 e -6, avente vertice nel punto V $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$. Dimostrare che la parabola Γ' che si ottiene traslando Γ del vettore $\vec{v}(3,2)$ ha lo stesso vertice dell'ellisse e passa per il punto P. Γ' è tangente ad α in P? Motivare la risposta.

Info

Bibliografia/Sitografia	M. Bergamini, G. Barozzi, A. Trifone Matematica.blu 2.0 - Zanichelli
Autori	Andrea Tartari andrea.tartari@gmail.com IIS "C. Varano" Camerino (MC)

Valutazione

Prova di verifica	Si può chiedere agli alunni di mostrare analiticamente, e poi verificare con la calcolatrice grafica, che la retta tangente alla parabola in P è secante l'ellisse e viceversa quella tangente all'ellisse in P è secante la parabola.
Osservazioni post attività	In generale, riguardo l'uso della calcolatrice grafica gli studenti hanno apprezzato molto uno dei suoi principali pregi, cioè il fatto che molti menù come ad esempio Grafici e Grafici Dinamici sono in collegamento tra loro e quindi ciò ottimizza il lavoro, quando, come spesso succede, li si utilizza entrambi. Per quanto riguarda l'attività proposta l'hanno trovata utile e interessante perché ha permesso loro di utilizzare contemporaneamente più menù della calcolatrice grafica.
Spunti di approfondimento	Sarebbe interessante e utile anche per il docente assegnare dei lavori di riepilogo agli studenti, una volta affrontato un determinato argomento e poi discuterli insieme. Ciò potrebbe costituire un'occasione di crescita e miglioramento nell'uso della calcolatrice grafica anche per il docente.

Sviluppo delle attività

Procedimento passo per passo

a) Il semiasse maggiore a, necessario alla determinazione dell'equazione dell'ellisse, può essere calcolato in due modi.
È istruttivo vederli entrambi.

1° modo

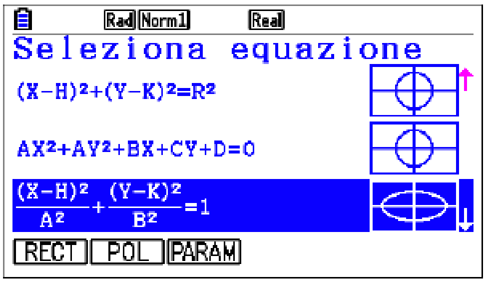
Considerando il secondo fuoco dell'ellisse

$F_2\left(\frac{5}{2}\sqrt{3},0\right), a = \frac{PF_1 + PF_2}{2} =$

$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{127 - 60\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{\frac{127 - 60\sqrt{3}}{4}}\right),$

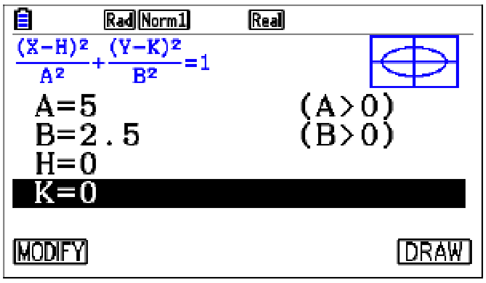
che può essere semplificata utilizzando la formula dei radicali doppi, ottenendo a=5. Sfruttando poi la semidistanza focale si ottiene b=5/2. Pertanto l'equazione dell'ellisse α risulta:

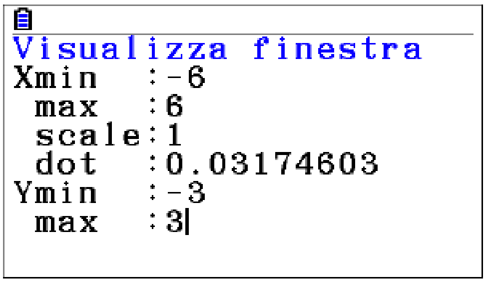
$\frac{x^2}{25} + \frac{4\,y^2}{25} = 1.$



Passaggio #1

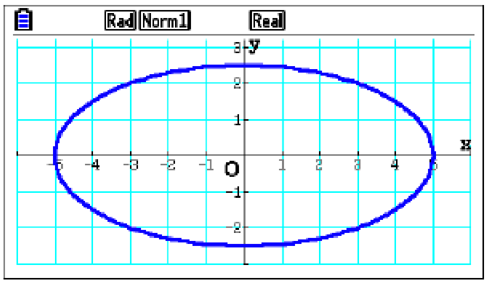
Possiamo verificare la correttezza dei risultati ottenuti accedendo al menù Coniche.
Selezionare l'equazione di un'ellisse ed inserire i parametri e premere **DRAW (F6)**.





Passaggio #2

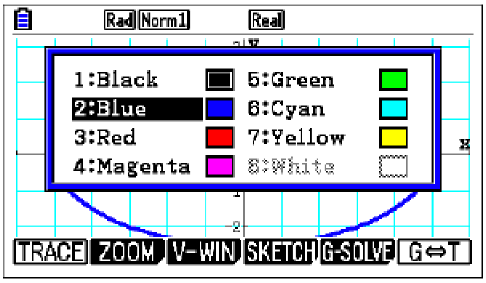
Nel caso in cui sia necessario cambiare la finestra di visualizzazione **premere V-Window (F3)** ed impostare i valori come mostrato. Premere **EXE** e visualizzare il grafico.
Con il comando **FORMAT (SHIFT 5)** si può cambiare colore alla curva se lo si desidera.

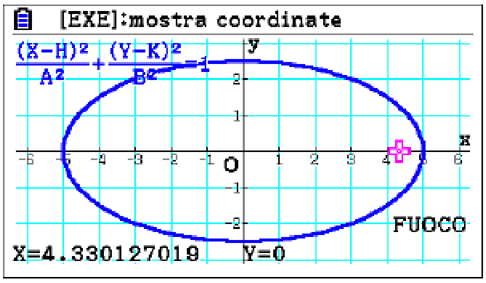


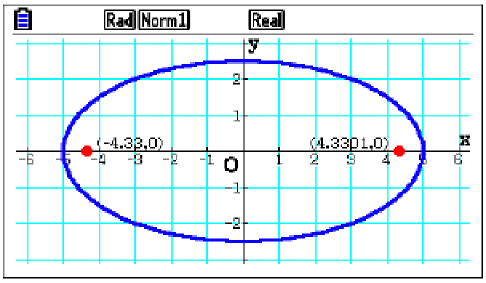
Passaggio #3

Tornare indietro con il comando **EXIT** e premere **G-Solv (F5)**. Selezionare Focus (F1) e premere **EXE** due volte per fissare il punto. Spostarsi con le frecce e fare la stessa cosa per il secondo fuoco. Premere **EXIT** per tornare indietro e rifare il grafico con il comando **DRAW**.

A questo punto vedremo il grafico dell'ellisse con i fuochi e le loro coordinate.



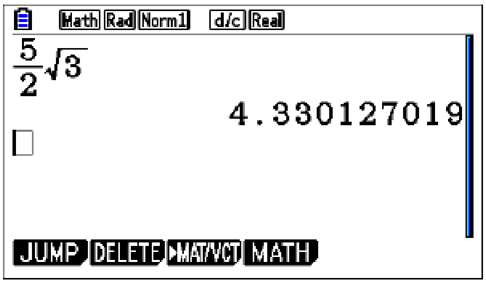




Passaggio #4

Entrando nel menù calcoli possiamo verificare che l'ascissa del fuoco corrisponde (in valore assoluto) a

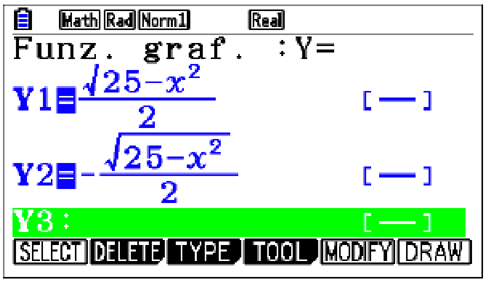
$\frac{5}{2}\sqrt{3}$. Con il tasto **S↔D** si può ottenere la visualizzazione in forma decimale del valore numerico.

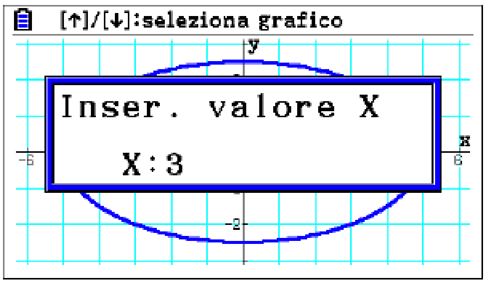


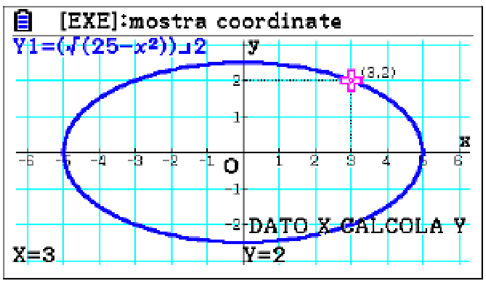
Passaggio #5

Per verificare l'appartenenza del punto P all'ellisse entriamo nel menù grafici e scriviamo l'equazione esplicita (una per l'arco superiore e una per quella inferiore). Per far in modo che il colore della linea sia lo stesso (blu nel nostro caso) utilizziamo la procedura descritta nel passaggio#2 sfruttando il comando **FORMAT**.

Una volta visualizzato il grafico premiamo **G-Solv (F5)**, scorrendo la lista con F6 e poi **YCAL(F1)** che fornisce il valore dell'ordinata y dato quello dell'ascissa. La calcolatrice ci permette di scegliere quale arco considerare facendolo lampeggiare. Scegliamo quello superiore con il comando **EXE** e poniamo x=3 premendo direttamente 3 sulla tastiera.Abbiamo verificato in questo modo che il punto P(3;2) appartiene all'ellisse.







2° modo

Il secondo metodo per determinare il semiasse maggiore a consiste nell'imporre il passaggio per il punto P(3;2) e sfruttare la relazione tra a,b e c dell'ellisse. Quindi si tratta di risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, per esempio a e b. La soluzione del sistema conduce all'equazione biquadratica in a: $4a^4 - 127a^2 + 675 = 0$. L'unica soluzione accettabile di questa equazione è a=5, visto che l'altra soluzione è minore di $\frac{5}{2}\sqrt{3}$. Verificheremo la soluzione ottenuta sia con il metodo grafico che algebrico.

Passaggio #6

Metodo grafico

Ritorniamo nel **menù Grafici**, deselezioniamo gli archi di ellisse e scriviamo in **Y3** la funzione quadratica che si ottiene ponendo $x=a^2$, aggiustando la finestra di visualizzazione come mostrato. Con il comando **DRAW** visualizziamo il grafico della parabola e poi con la sequenza **G-Solve (F5) ROOT (F1)** visualizziamo lo zero accettabile, corrispondente al valore di $a^2=25$.

Metodo algebrico

Entriamo nel menù equazioni e selezioniamo **ALGEBRICHE** con **F2**, scegliamo **grado 2** con **F1** e inseriamo i coefficienti. Otteniamo due soluzioni di cui soltanto la prima è accettabile.

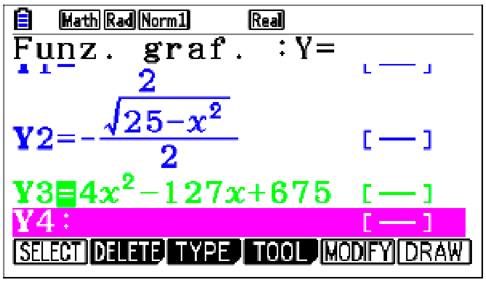
b) L'equazione della retta tangente all'ellisse in P si può determinare facilmente utilizzando la formula di sdoppiamento.

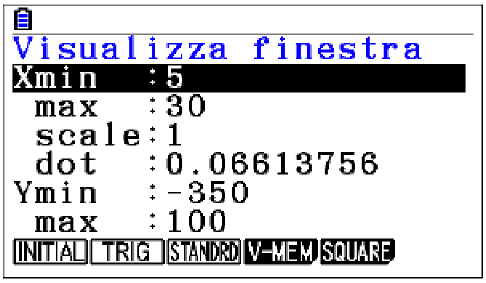
Si ha $\frac{3x}{25}+\frac{8y}{25}=1$, da cui

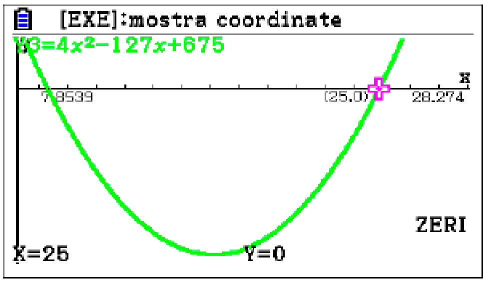
$$y=-\frac{3}{8}x+\frac{25}{8}.$$

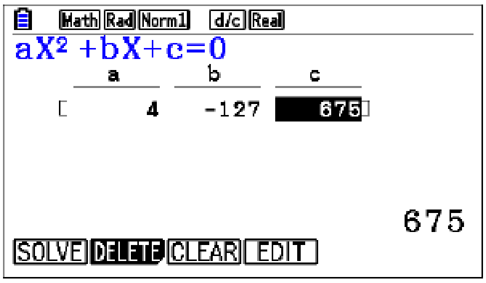
Con semplici passaggi matematici si determina anche quella della normale, che

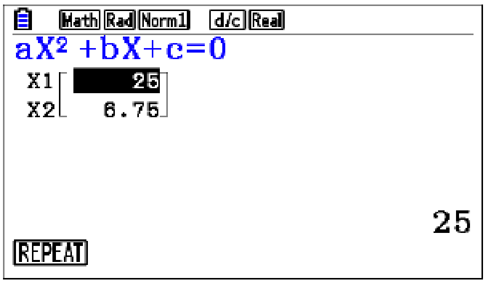
risulta essere $y=\frac{8}{3}x-6$.











Passaggio #7

Entriamo nel **SET UP** della calcolatrice con il comando **SHIFT+Menù** e impostiamo Derivative On. Ciò ci permetterà di visualizzare sullo schermo le equazioni delle rette tangente e perpendicolare all'ellisse nel punto P. Torniamo nel menù Grafici, premiamo il comando **Sketch (F4)**, **Tangent (F2)** e inseriamo da tastiera il valore dell'ascissa del punto di tangenza, $x=3$.

Premendo **EXE** la calcolatrice ci mostra l'ellisse e la retta tangente in P, con anche la sua equazione.

Si può facilmente verificare che è quella ottenuta analiticamente.

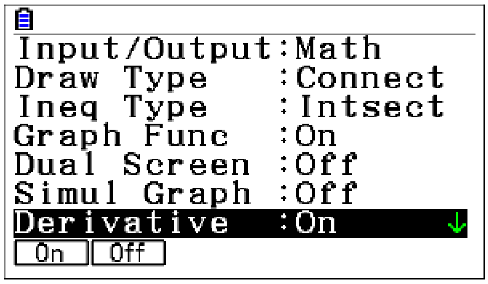
Ripetiamo lo stesso procedimento con il comando **Sketch** scegliendo questa volta **Norm (F3)** e inserendo il valore dell'ascissa del punto. Otteniamo così nello stesso grafico anche la retta normale e la sua equazione, ancora una volta in accordo con quella ottenuta analiticamente.

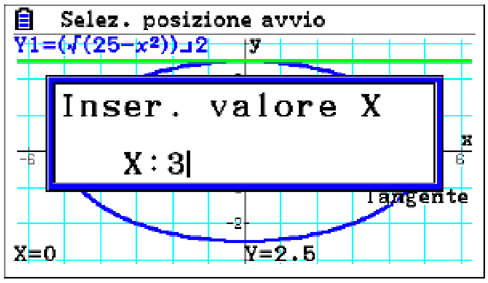
c) L'equazione della circonferenza y si può ottenere calcolandone prima il raggio dalla formula della distanza tra C e P. Si trova

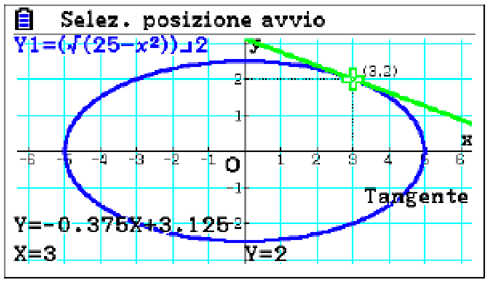
$r = \sqrt{\frac{73}{16}}$.

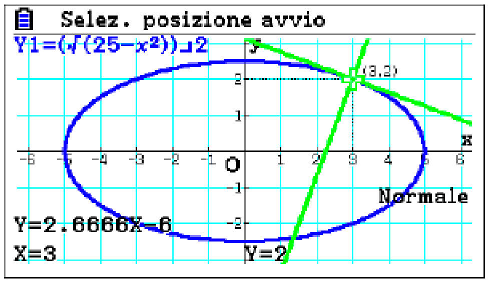
Quindi l'equazione della circonferenza, avendo centro in C sarà

$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2 + y^2 = \sqrt{\frac{73}{16}}$.







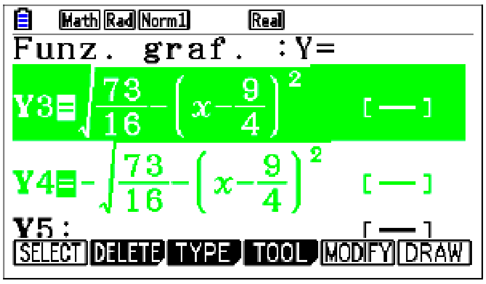


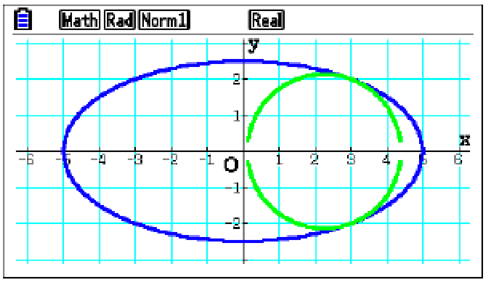
Passaggio #8

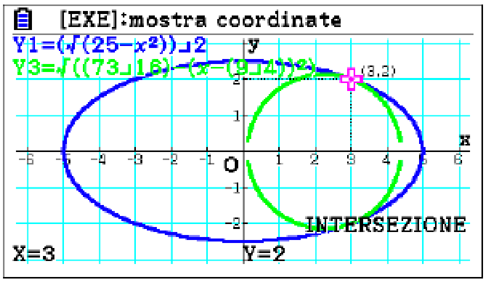
Scriviamo le equazioni esplicite delle due semicirconferenze, anche se ci interessa soltanto quella superiore. Per cambiare colore ad **Y4** si rimanda ala **passaggio #2**.

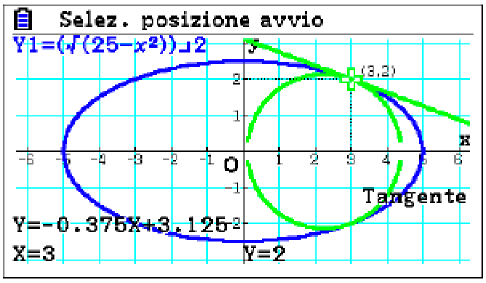
Premiamo **DRAW** e visualizziamo i grafici. Con il comando **Gsolv (F5)** seguito da **Intsect (F5)** verifichiamo che il punto di tangenza tra i due archi superiori è proprio il punto P. La calcolatrice ci permette di scegliere la coppia di curve: scegliamo quelle relative agli archi superiori, muovendoci con le frecce ↑↓. Possiamo anche verificare che le due curve hanno tangente comune in x=3 data dalla retta già trovata nel passaggio #7.

Analiticamente si può mostrare che le due curve sono tangenti in P verificando che hanno tale tangente in comune. Mettendo a sistema l'equazione della tangente con quella della semicirconferenza superiore si arriva all'equazione x^2-6x+9=0, che ha chiaramente discriminante nullo e soluzione x=3.





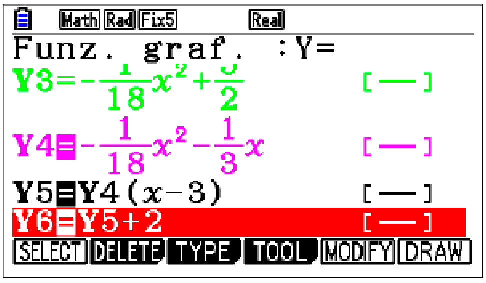


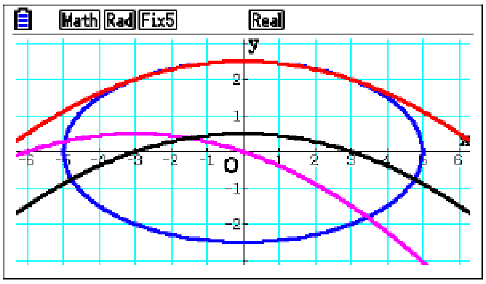


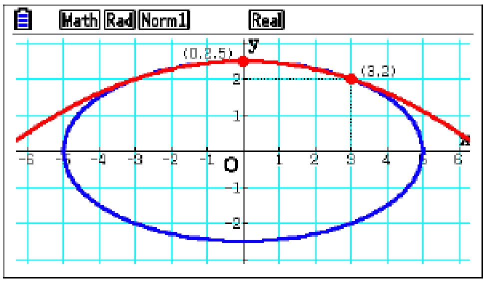
d) La parabola Γ si può determinare facilmente a partire dall'equazione del fascio di parabole aventi zeri 0 e -6, imponendo poi il passaggio per il vertice. Cioè dall'equazione $y=ax(x+6)$ si ottiene $y=-\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{3}x$ e applicando le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(3,2)$ si arriva all'equazione di Γ $y=-\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{2}$

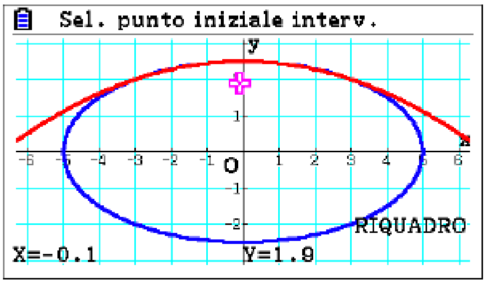
Passaggio #9

Scriviamo le equazioni di Γ' e Γ rispettivamente in **Y3** e **Y4**, deselezionando la Y3. Applichiamo la traslazione richiesta posizionandoci col cursore dopo il simbolo di uguale in **Y5** e scegliamo **Y (F1)** e digitiamo 4 di seguito per richiamare la funzione Γ. Applichiamo poi la traslazione lungo x nell'argomento di Y4.
In **Y6** invece operiamo la traslazione lungo y (cambiamo il colore per poter distinguere le curve). Ritorniamo su Y3, selezioniamola e mostriamo che le due parabole si sovrappongono. Si può anche far vedere che cercando i punti di intersezione tra le due curve si può andare avanti scorrendo le due curve, proprio perché coincidono.
Lasciando soltanto la parabola traslata Γ' e l'ellisse si può verificare che il vertice della parabola coincide con quello dell'ellisse. Andiamo su **G-Solv(F5)** e scegliamo **Max (F2)** e scegliamo con le frecce il grafico della parabola e poi **EXE**. Poi andiamo su Intesect (F5), selezioniamo la parabola e l'arco superiore dell'ellisse premiamo **EXE** e spostiamoci con la freccia destra fino ad individuare il punto P. Premiamo **EXE** due volte, torniamo indietro con **Exit** e rifacciamo il grafico con il comando **DRAW (F6)**.









Passaggio #10

Anche senza cambiare finestra di visualizzazione si nota che nell'intervallo compreso tra i due punti di intersezione nel primo quadrante il grafico dell'ellisse è sopra quello della parabola, mentre per x>3 la situazione si inverte, quindi le due curve devono essere secanti. La differenza è veramente minima, ma diventa un po' più evidente effettuando un ingrandimento con il comando **Zoom (F2)** seguito da **BOX (F1)**. Spostiamoci col cursore e posizionamoci nel punto (-0.1,1.9) e premiamo EXE, spostiamoci ancora verso destra fino a x=3.1, premiamo **EXE** e poi verso l'alto fino a y =2.6, premendo **EXE** di nuovo.

Confermiamo così quanto detto all'inizio.
Analiticamente si può mostrare che la retta tangente alla parabola nel punto P ha equazione $y = -\frac{1}{3}x + 3$,
che è diversa dalla retta tangente all'ellisse in P precedentemente trovata, anche se si discosta poco da essa. Dunque le due curve non sono tangenti in P.
Possiamo vedere la differenza tra le due rette dal grafico a fianco.